

Instructions for translators

1. Open this file on GitHub server. If you see `https://um.mendelu.cz/...` in URL, click View on GitHub to open this file on github.com.
2. If you see this file on GitHub server, you can edit the content of the file. Open the file in an editor. You can use simple editor (press e on GitHub). However, an advanced VS Code editor (press . on GitHub) is better, since it provides preview how the Markdown code renders. Alternatively press pencil for simple editor or press triangle next to the pencil to get access to VS Code described as github.dev.
3. Fix the keywords in the preamble.
4. Depending on which language version you want to use as a source for your translation, delete either English or Czech version below.
5. Translate to your language. Keep Markdown marking and math notation. If you use a tool to get first version of the translation, make sure that the markup is preserved.
6. In VS Code you can open the preview in another window by pressing `Ctrl+V` and `K`. Keep the preview open as you work, or close using a mouse.
7. Instead of saving, you have to commit and push the changes to the repository. Fill the Message under Source control (describe your changes, such as “Polish translation started”) and then press Commit&Push.
8. Make sure that your changes appear in the commit history. In rare cases (if you work with simultaneously with someone else) you have to download /Pull/ and merge his and yours changes. Usually Sync (Pull & Push) should work.
9. When you finish the translation, change `is_finished: False` in header to `is_finished: True`.

Instrukce pro překladaatele

1. Otevřete tento soubor na serveru GitHub. Pokud máte soubor otevřen na `https://um.mendelu.cz/...`, otevřete jej na serveru github.com.
2. Pokud tento soubor vidíte na serveru GitHub, můžete obsah souboru upravit. Otevřete soubor v editoru. Můžete použít jednoduchý editor (stiskněte e na GitHubu). Lepší je však pokročilý editor VS Code (stikněte . na GitHubu), protože poskytuje náhled, jak se kód Markdown interpretuje. Případně stiskněte tužku pro jednoduchý editor nebo stiskněte trojúhelníček vedle tužky, abyste získali přístup k editoru VS Code popsany jako github.dev.
3. Opravte klíčová slova v preambuli.
4. V závislosti na tom, kterou jazykovou verzi chcete použít jako zdrojový kód pro svůj překladu, odstraňte níže uvedenou anglickou nebo českou verzi.
5. Přeložte do svého jazyka. Ponechte značení Markdown a matematický zápis. Pokud použijete nástroj typu DeepL pro získání první verze překladu, ujistěte se, že zápis matematických výrazů byl zachován.
6. Ve VS Code můžete náhled otevřít v jiném okně stisknutím `Ctrl+V`. a `K`. Během práce nechte náhled otevřený nebo jej zavřete pomocí myši.
7. Místo uložení musíte změny zaregistrovat a odeslat do úložiště. Vyplňte zprávu v poli Zpráva (popište své změny, např. “Zahájen překlad do polštiny”) a poté stiskněte tlačítko Commit&Push.

8. Ujistěte se, že se vaše změny objeví v historii revizí. Ve výjimečných případech (pokud pracujete současně s někým jiným) musíte stáhnout /Pull/ a sloučit jeho a vaše změny. Obvykle by synchronizace (Pull & Push) měla fungovat.
9. Po dokončení překladu změňte `is_finished: False` v záhlaví na `is_finished: True`.

Czech source

Optimalizace výnosů

Keywords: analytic geometry, quadratic equation, systems of equations, equation of a circle

Při rozhodování o investicích nestačí spoléhat na jednoduché lineární modely – trh je totiž dynamický a plný nejistot. Sestavení optimálního investičního portfolia tak vyžaduje přístup, který zohlední nejen očekávaný výnos, ale i riziko a další omezení, jako jsou dostupné finanční prostředky nebo požadavky na diverzifikaci. Výnosy jednotlivých aktiv nelze předem přesně určit – jejich chování je ovlivněno mnoha faktory, a proto je třeba využít modely založené na kvadratických funkcích. Právě tento přístup – dnes známý jako moderní teorie portfolia – položil základy pro nový pohled na investování. Za zásadní přínos v této oblasti byli v roce 1990 oceněni Nobelovou cenou Harry Markowitz, William Sharpe a Merton Miller.

Tyto problémy tak vedou na úlohy tzv. *kvadratického programování*, což je oblast matematické optimalizace, která se zabývá hledáním extrémů (obvykle minima nebo maxima) kvadratické funkce na množině bodů vymezené lineárními rovnicemi a nerovnicemi.

Influencer touží po úspěchu

Neznámý influencer by rád pomocí propagace příspěvků a placené reklamy zvýšil počet svých sledujících na Instagramu a TikToku. Podle dostupných informací přepokládá, že investovaných 10 000 Kč do propagace na Instagramu mu přinese 1000 sledujících a stejná částka investovaná do reklamy na TikToku mu přinese také 1000 sledujících na této sociální síti. Díky výhodné nabídce může utratit maximálně 20 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 1. Kolik peněz má influencer utratit za reklamu a propagaci na jednotlivých sociálních sítích, pokud se chce co nejvíce přiblížit tomu, aby měl 3 000 sledujících na Instagramu a 2 000 sledujících na TikToku?

Řešení. Označíme-li x velikost investice do propagace na Instagramu v desítkách tisíc a podobně y velikost investice do reklamy na TikToku, tak optimální hodnota celkových nákladů musí splňovat podmínky

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{a} \quad 0 \leq y \leq 1,$$

tj. leží v obdélníku. Do stejné soustavy souřadnic můžeme též vyznačit i bod, který značí cílovou hodnotu počtu sledujících. Je-li x počet sledujících na Instagramu v tisících a y počet sledujících v tisících na TikToku, tak se jedná bod o souřadnicích $[3, 2]$.

Hledáme tedy bod, který leží uvnitř daného obdélníku a má nejmenší vzdálenost od bodu $[3, 2]$.

Results matter!

Vzdálenost libovolného bodu $[x, y]$ od bodu $[3, 2]$ je dána vztahem

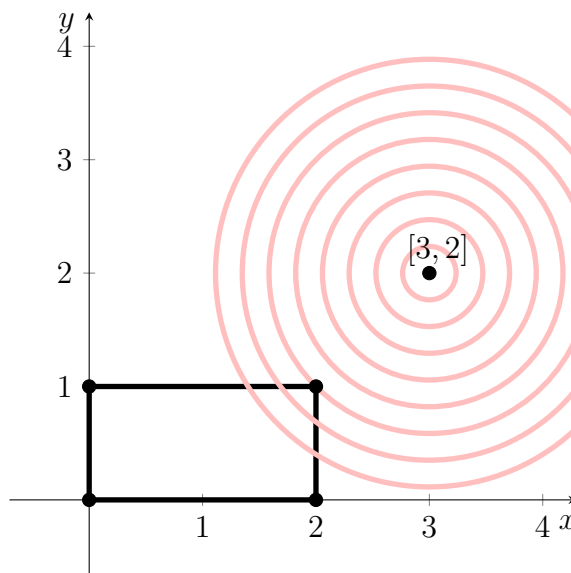
$$v(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

Jelikož odmocnina je rostoucí funkce, tak je-li $0 \leq a < b$ pak nutně také $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Abychom tedy minimalizovali hodnotu $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ stačí minimalizovat hodnotu $(x-3)^2 + (y-2)^2$.

Pro libovolné $c > 0$ rovnost

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = c$$

odpovídá kružnici se středem v bodě $[3, 2]$ a poloměrem $\sqrt{c}$, tj. naším úkolem je najít kružnici s nejmenším možným poloměrem, která má neprázdný průnik s daným obdélníkem. Situace je znázorněna na obrázku, z kterého můžeme řešení uhádnout.



Obr. 1: K řešení Úlohy 1

Odtud vidíme, že řešením je bod $[2, 1]$. Je to však skutečně pravda? Z obrázku vidíme, že výsledná kružnice se dotkne daného obdélníku v pravém horním vrcholu. To znamená, že průnik této kružnice s přímkou určující horní stranu obdélníku a průnik kružnice s přímkou určující pravou stranu obdélníku musí být stejný. Jinými slovy, soustavy

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= c \\ y &= 1 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= c \\ x &= 2 \end{aligned}$$

musí mít alespoň jedno společné řešení. Vyřešit každou soustavu zvlášť nemůžeme, protože bychom dostali kvadratickou rovnici o 2 neznámých. Avšak dosazením $x = 2$ a $y = 1$ dostaneme dvojici rovnic

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= c \\ 1 + (y-2)^2 &= c, \end{aligned}$$

Results matter!

z čehož plyne, že nutně

$$(x - 3)^2 + 1 = 1 + (y - 2)^2$$

neboli

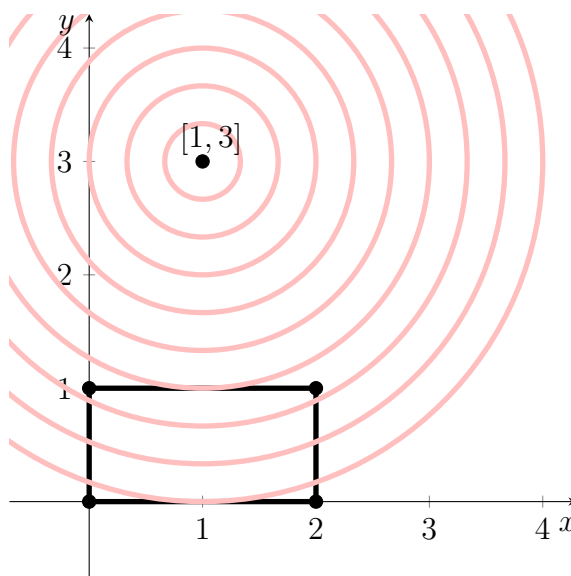
$$(x - 3)^2 = (y - 2)^2,$$

což po odmocnění dává

$$|x - 3| = |y - 2|.$$

Tato rovnost je očividně splněna pro bod $[2, 1]$. Vidíme tedy, že nejbližše se svému cíli dostane, investuje-li maximální částku 20 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 2. Jak se změní řešení Úlohy 1, je-li cílová hodnota 1 000 sledujících na Instagramu a 3 000 na TikToku?

Řešení. V tomto případě minimalizujeme vzdálenost od bodu bodu $[1, 3]$. Situace tak vypadá následovně.


Obr. 2: K řešení Úlohy 2

Řešením tedy bude bod ležící na přímce $y = 1$, což nás přivádí k soustavě

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= c \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Jedná se o soustavu kvadratické a lineární rovnice o 3 neznámých, ze které snadno uděláme kvadratickou rovnici o 2 neznámých

$$(x - 1)^2 + 4 = c.$$

Z obrázku vidíme, že hledaná kružnice s nejmenším poloměrem se daného obdélníku pouze dotkne, tj. číslo c musí být takové, že kvadratická rovnice má pouze 1 řešení (nemá-li žádné, je poloměr malý a kružnice má prázdný průnik s obdélníkem, má-li dvě různá řešení, pak nutně existuje kružnice s o něco menším poloměrem, která má opět neprázdný průnik s obdélníkem). Řešení kvadratické rovnice je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{c - 4} + 1.$$

Results matter!

Řešení bude jediné (resp. obě řešení splynou), pouze pro $c = 4$. V takovém případě bude $x = 1$, tj. řešením je bod $[1, 1]$. Tentokrát tedy stačí utratit 10 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

English source

Not available on July 10. If you want to start from English translation, wait until it appears on <https://um.mendelu.cz/math4u/site/> and copy the English text by hand.