

Optimalizacja wydajności

Keywords: geometria analityczna, równanie kwadratowe, układy równań, równanie okręgu

Przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych nie wystarczy polegać na prostych modelach liniowych - rynek jest dynamiczny i pełen niepewności. Zbudowanie optymalnego portfela inwestycyjnego wymaga zatem podejścia uwzględniającego nie tylko oczekiwaną stopę zwrotu, ale także ryzyko i inne ograniczenia, takie jak dostępne zasoby finansowe czy wymagania dotyczące dywersyfikacji. Zwrotów z poszczególnych aktywów nie da się z góry precyzyjnie określić - na ich zachowanie wpływa wiele czynników, dlatego potrzebne są modele oparte na funkcjach kwadratowych. Podejście to - znane obecnie jako nowoczesna teoria portfelowa - położyło podwaliny pod nowe spojrzenie na inwestowanie. Za swój fundamentalny wkład w tę dziedzinę Harry Markowitz, William Sharpe i Merton Miller otrzymali w 1990 roku Nagrodę Nobla.

Problemy te prowadzą zatem do tak zwanych zadań programowania kwadratowego, gałęzi optymalizacji matematycznej, która koncentruje się na znajdowaniu ekstremów (zazwyczaj minimów lub maksimów) funkcji kwadratowej w zbiorze punktów zdefiniowanych przez równania i nierówności liniowe.

Droga influencera do sukcesu

Aspirujący influencer ma nadzieję na zwiększenie liczby obserwujących na Instagramie i TikTok poprzez promocję postów i płatne reklamy. Według dostępnych danych, inwestując 10 000 CZK w promocję na Instagramie, można zyskać 1000 nowych obserwujących, a ta sama inwestycja w reklamy na TikTok ma przynieść 1000 nowych obserwujących na tej platformie. Dzięki specjalnej ofercie influencer może wydać maksymalnie 20 000 CZK na promocję na Instagramie i 10 000 CZK na reklamę na TikTok.

Zadanie 1. Ile influencer powinien wydać na promocję i reklamę na każdej platformie mediów społecznościowych, aby zbliżyć się jak najbardziej do zdobycia 3000 obserwujących na Instagramie i 2000 obserwujących na TikTok?

Rozwiązanie. Niech x reprezentuje kwotę zainwestowaną w promocję na Instagramie w dziesiątkach tysięcy CZK, a y reprezentuje inwestycję w reklamę na TikTok. Wówczas optymalna wartość kosztu całkowitego musi spełniać następujące warunki

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq 1,$$

tzn. rozwiązanie leży wewnątrz prostokąta. Na tym samym układzie współrzędnych możemy również wykreślić punkt reprezentujący docelową liczbę obserwujących. Jeśli x oznacza liczbę obserwujących na Instagramie w tysiącach, a y liczbę obserwujących na TikTok w tysiącach, to punkt docelowy ma współrzędne $[3, 2]$.

Szukamy punktu wewnątrz danego prostokąta, który jest jak najbliżej punktu $[3, 2]$.

Odległość dowolnego punktu $[x, y]$ od punktu $[3, 2]$ jest określona wzorem

$$v(x, y) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}.$$

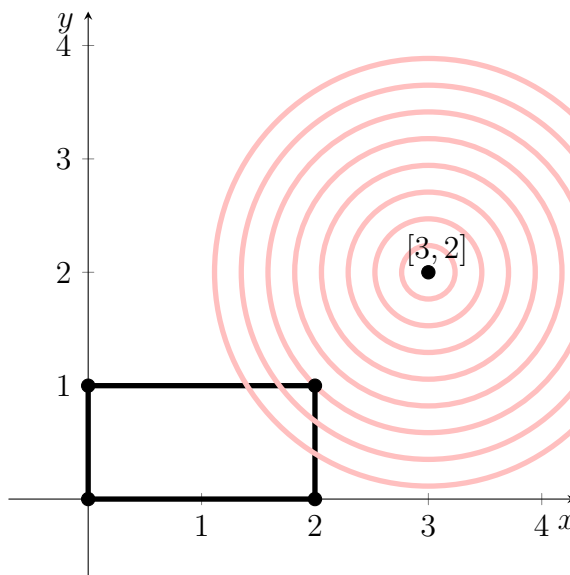
Ponieważ pierwiastek kwadratowy jest funkcją rosnącą, tzn. jeśli $0 \leq a < b$ to koniecznie $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, minimalizacja $\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$ jest równoważna minimalizacji $(x - 3)^2 + (y - 2)^2$.

Results matter!

Dla dowolnego $c > 0$, równanie

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = c$$

reprezentuje okrąg o środku w punkcie $[3, 2]$ i promieniu $\sqrt{c}$. Naszym zadaniem jest znalezienie okręgu o najmniejszym możliwym promieniu, który nadal przecina dany prostokąt. Sytuację ilustruje poniższy rysunek, który daje nam wskazówkę co do rozwiązania.



Rysunek 1: Zadanie 1- rozwiązanie

Z rysunku wynika, że rozwiązaniem jest punkt $[2, 1]$. Ale czy tak jest naprawdę? Rysunek pokazuje, że wynikowy okrąg dotyka prostokąta dokładnie w jego prawym górnym rogu. Oznacza to, że punkt przecięcia okręgu z linią tworzącą górną krawędź prostokąta musi być taki sam, jak punkt przecięcia okręgu z linią tworzącą prawą krawędź prostokąta. Innymi słowy, poniższe układy równań muszą mieć co najmniej jedno wspólne rozwiązanie:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ y &= 1\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ x &= 2\end{aligned}$$

Nie możemy rozwiązać każdego układu osobno, ponieważ spowodowałoby to powstanie równania kwadratowego z dwiema niewiadomymi. Jednak podstawiając $x = 2$ i $y = 1$, otrzymujemy następującą parę równań:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + 1 &= c \\ 1 + (y - 2)^2 &= c,\end{aligned}$$

co oznacza, że

$$(x - 3)^2 + 1 = 1 + (y - 2)^2$$

Results matter!

lub

$$(x - 3)^2 = (y - 2)^2,$$

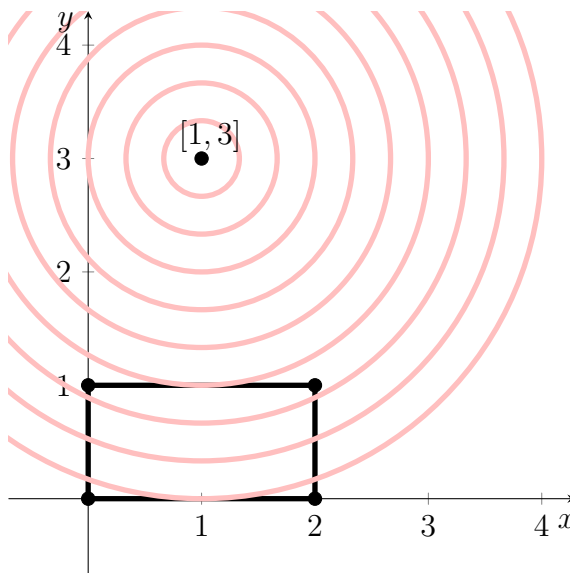
co daje, po wzięciu pierwiastka kwadratowego,

$$|x - 3| = |y - 2|.$$

Równanie to jest wyraźnie spełnione dla punktu $[2, 1]$. Możemy zatem stwierdzić, że influencer będzie najbliżej swojego celu, inwestując maksymalną kwotę 20 000 CZK w promocję na Instagramie i 10 000 CZK w reklamę na TikTok.

Zadanie 2. Jak zmienia się rozwiązanie zadania 1, jeśli celem jest 1000 obserwujących na Instagramie i 3000 na TikTok?

Rozwiązanie. W tym przypadku minimalizujemy odległość od punktu $[1, 3]$. Sytuacja została zilustrowana poniżej.



Rysunek 2: Zadanie 2-rozwiązanie

Rozwiązanie będzie leżało na linii $y = 1$, co prowadzi nas do układu

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= c \\ y &= 1.\end{aligned}$$

Jest to układ składający się z jednego równania kwadratowego i jednego równania liniowego w trzech zmiennych, który możemy łatwo zredukować do równania kwadratowego w dwóch zmiennych:

$$(x - 1)^2 + 4 = c.$$

Z powyższego rysunku widzimy, że pożądany okrąg o najmniejszym możliwym promieniu tylko dotyka prostokąta. Oznacza to, że liczba c musi być taka, aby równanie kwadratowe miało tylko jedno rozwiązanie (jeśli nie ma żadnego, promień jest zbyt mały i okrąg nie przecina prostokąta; jeśli ma dwa

Results matter!

różne rozwiązania, musi istnieć okrąg o nieco mniejszym promieniu, który nadal przecina prostokąt).
Rozwiązaniem równania kwadratowego jest

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{c-4} + 1.$$

Rozwiązanie będzie dokładnie jedno (tzn. oba rozwiązania będą zbieżne) tylko wtedy, gdy $c = 4$. W takim przypadku $x = 1$, co oznacza, że rozwiązaniem jest punkt $[1, 1]$. Tym razem influencer musi wydać tylko 10 000 CZK na promocję na Instagramie i 10 000 CZK na reklamę na TikTok.