

Optimalizace výnosů

Keywords: analytická geometrie, kvadratická rovnice, soustavy rovnic, rovnice kružnice

Při rozhodování o investicích nestačí spoléhat na jednoduché lineární modely – trh je totiž dynamický a plný nejistot. Sestavení optimálního investičního portfolia tak vyžaduje přístup, který zohlední nejen očekávaný výnos, ale i riziko a další omezení, jako jsou dostupné finanční prostředky nebo požadavky na diverzifikaci. Výnosy jednotlivých aktiv nelze předem přesně určit – jejich chování je ovlivněno mnoha faktory, a proto je třeba využít modely založené na kvadratických funkcích. Právě tento přístup – dnes známý jako moderní teorie portfolia – položil základy pro nový pohled na investování. Za zásadní přínos v této oblasti byli v roce 1990 oceněni Nobelovou cenou Harry Markowitz, William Sharpe a Merton Miller.

Tyto problémy tak vedou na úlohy tzv. *kvadratického programování*, což je oblast matematické optimalizace, která se zabývá hledáním extrémů (obvykle minima nebo maxima) kvadratické funkce na množině bodů vymezené lineárními rovnicemi a nerovnicemi.

Influencer touží po úspěchu

Neznámý influencer by rád pomocí propagace příspěvků a placené reklamy zvýšil počet svých sledujících na Instagramu a TikToku. Podle dostupných informací přepokládá, že investovaných 10 000 Kč do propagace na Instagramu mu přinese 1000 sledujících a stejná částka investovaná do reklamy na TikToku mu přinese také 1000 sledujících na této sociální síti. Díky výhodné nabídce může utratit maximálně 20 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 1. Kolik peněz má influencer utratit za reklamu a propagaci na jednotlivých sociálních sítích, pokud se chce co nejvíce přiblížit tomu, aby měl 3 000 sledujících na Instagramu a 2 000 sledujících na TikToku?

Řešení. Označíme-li x velikost investice do propagace na Instagramu v desítkách tisíc a podobně y velikost investice do reklamy na TikToku, tak optimální hodnota celkových nákladů musí splňovat podmínky

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{a} \quad 0 \leq y \leq 1,$$

tj. leží v obdélníku. Do stejné soustavy souřadnic můžeme též vyznačit i bod, který značí cílovou hodnotu počtu sledujících. Je-li x počet sledujících na Instagramu v tisících a y počet sledujících v tisících na TikToku, tak se jedná bod o souřadnicích $[3, 2]$.

Hledáme tedy bod, který leží uvnitř daného obdélníku a má nejmenší vzdálenost od bodu $[3, 2]$.

Vzdálenost libovolného bodu $[x, y]$ od bodu $[3, 2]$ je dána vztahem

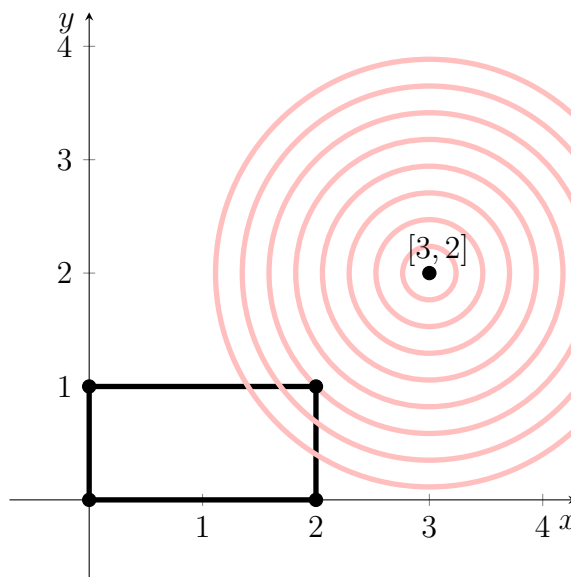
$$v(x, y) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}.$$

Jelikož odmocnina je rostoucí funkce, tak je-li $0 \leq a < b$ pak nutně také $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Abychom tedy minimalizovali hodnotu $\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$ stačí minimalizovat hodnotu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2$.

Pro libovolné $c > 0$ rovnost

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = c$$

odpovídá kružnici se středem v bodě $[3, 2]$ a poloměrem $\sqrt{c}$, tj. naším úkolem je najít kružnici s nejmenším možným poloměrem, která má neprázdný průnik s daným obdélníkem. Situace je znázorněna na obrázku, z kterého můžeme řešení uhádnout.



Obrázek 1: K řešení Úlohy 1

Odtud vidíme, že řešením je bod $[2, 1]$. Je to však skutečně pravda? Z obrázku vidíme, že výsledná kružnice se dotkne daného obdélníku v pravém horním vrcholu. To znamená, že průnik této kružnice s přímkou určující horní stranu obdélníku a průnik kružnice s přímkou určující pravou stranu obdélníku musí být stejný. Jinými slovy, soustavy

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ y &= 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ x &= 2\end{aligned}$$

musí mít alespoň jedno společné řešení. Vyřešit každou soustavu zvlášť nemůžeme, protože bychom dostali kvadratickou rovnici o 2 neznámých. Avšak dosazením $x = 2$ a $y = 1$ dostaneme dvojici rovnic

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + 1 &= c \\ 1 + (y - 2)^2 &= c,\end{aligned}$$

z čehož plyne, že nutně

$$(x - 3)^2 + 1 = 1 + (y - 2)^2$$

neboli

$$(x - 3)^2 = (y - 2)^2,$$

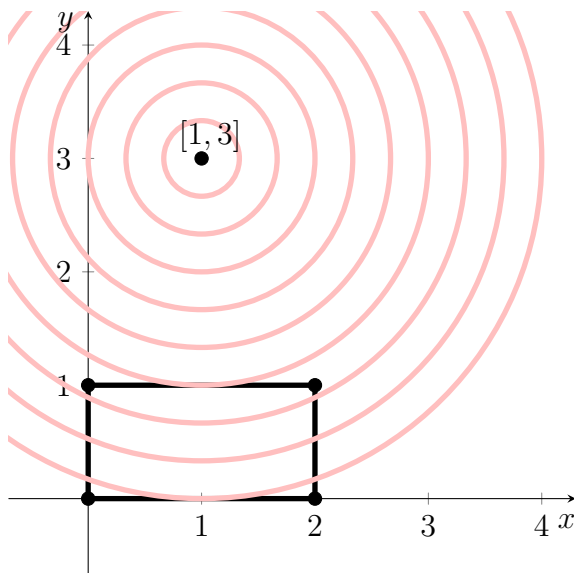
což po odmocnění dává

$$|x - 3| = |y - 2|.$$

Tato rovnost je očividně splněna pro bod $[2, 1]$. Vidíme tedy, že nejbližší se svému cíli dostane, investuje-li maximální částku 20 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 2. Jak se změní řešení Úlohy 1, je-li cílová hodnota 1 000 sledujících na Instagramu a 3 000 na TikToku?

Řešení. V tomto případě minimalizujeme vzdálenost od bodu bodu $[1, 3]$. Situace tak vypadá následovně.



Obrázek 2: K řešení Úlohy 2

Řešením tedy bude bod ležící na přímce $y = 1$, což nás přivádí k soustavě

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= c \\ y &= 1.\end{aligned}$$

Jedná se o soustavu kvadratické a lineární rovnice o 3 neznámých, ze které snadno uděláme kvadratickou rovnici o 2 neznámých

$$(x - 1)^2 + 4 = c.$$

Z obrázku vidíme, že hledaná kružnice s nejmenším poloměrem se daného obdélníku pouze dotkne, tj. číslo c musí být takové, že kvadratická rovnice má pouze 1 řešení (nemá-li žádné, je poloměr malý a kružnice má prázdný průnik s obdélníkem, má-li dvě různá řešení, pak nutně existuje kružnice s o něco menším poloměrem, která má opět neprázdný průnik s obdélníkem). Řešení kvadratické rovnice je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{c - 4} + 1.$$

Řešení bude jediné (resp. obě řešení splynou), pouze pro $c = 4$. V takovém případě bude $x = 1$, tj. řešením je bod $[1, 1]$. Tentokrát tedy stačí utratit 10 000 Kč za propagaci na Instagramu a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.