

Round robin

Keywords: kombinatorika, pravděpodobnost a statistika, kombinatorika

Představte si, že pořádáte školní turnaj ve stolním tenise, šachu, e-sportu nebo třeba futsale. Chcete, aby byl co nejspravedlivější – aby každý hráč měl možnost utkat se se všemi ostatními. Právě k tomu slouží systém každý s každým, známý také jako round robin.

Jeho hlavní výhodou je férovost: výsledné pořadí závisí jen na výkonech hráčů nebo týmů, ne na náhodném losu soupeřů. Na druhou stranu, počet zápasů rychle roste s počtem účastníků – naplánovat takový turnaj může být docela výzva. A právě zde přichází ke slovu kombinatorika – matematika počítání možností.

Futsalový turnaj

Úloha 1. Na turnaj ve futsalu se přihlásilo 9 týmů. Je vedený systémem round robin, tzn. každý tým hraje s každým jeden zápas. Tým za každou výhru v zápase dostává 2 body, za remízu 1 bod a za prohru 0 bodů. O celkovém umístění týmu rozhodne závěrečný součet bodů za všechny zápasy. Kolik zápasů je nutné na turnaji odehrát? Kolika způsoby je možné sestavit rozvrh turnaje, je-li k dispozici jediné hřiště, na kterém se zápasy postupně odehrávají?

Úloha 2. Ukažte, že jestliže některý tým v turnaji z předchozí úlohy získal celkem 13 bodů, pak nutně patří mezi čtyři nejlepší týmy turnaje.

Férovější soutěž

Na další ročník futsalového turnaje z předchozích úloh se tentokrát přihlásilo 7 týmů. Při sestavování rozvrhu turnaje si však organizátor dal novou podmínku, že žádný tým nesmí hrát ve dvou zápasech těsně za sebou, aby hráči nemuseli hrát unavení a turnaj byl férovější.

Libor vymyslel algoritmus, jak požadovanou posloupnost zápasů sestavit. Vychází z následující tabulky.

tým 2	D_1					
tým 3	D_2	D_1				
tým 4	D_3	D_2	D_1			
tým 5	D_4	D_3	D_2	D_1		
tým 6	D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	
tým 7		D_5	D_4	D_3	D_2	D_1
	tým 1	tým 2	tým 3	tým 4	tým 5	tým 6

Obrázek 1: Tabulka pro tvorbu programu férového turnaje

Její každé pole v i -tém řádku a j -tém sloupci odpovídá zápasu $(i + 1)$ -tého a j -tého týmu. Hledaná posloupnost zápasů bude odpovídat pořadí polí, která Libor postupně vybírá. Pro přehlednost budeme tato pole značit dle týmů, jejichž zápas reprezentuje, tj. $[1; 2]$, $[3; 5]$ atd. Dále označíme nejdelší diagonálu začínající polem $[1; 2]$ a končící polem $[6; 7]$ jako D_1 , kratší diagonálu začínající polem $[1; 3]$ a končící polem $[5; 7]$ jako D_2 apod.

Liborův algoritmus vypadá následovně: - jako první vybereme pole v prvním sloupci a posledním řádku, tj. $[1; 7]$; - dále vybíráme po řadě pole diagonály D_1 v sudých sloupcích zleva doprava; - dále vybíráme po řadě zbylá pole diagonály D_1 v lichých sloupcích zleva doprava; - dále vybíráme zleva doprava všechna pole diagonály D_2 ; - dále vybíráme zleva doprava všechna pole diagonály D_3 , následně D_4 atd.

Pro turnaj o sedmi týmech tak dostaneme následující pořadí zápasů

$[1; 7]$, $[2; 3]$, $[4; 5]$, $[6; 7]$, $[1; 2]$, $[3; 4]$, $[5; 6]$,
 $[1; 3]$, $[2; 4]$, $[3; 5]$, $[4; 6]$, $[5; 7]$, $[1; 4]$, $[2; 5]$,
 $[3; 6]$, $[4; 7]$, $[1; 5]$, $[2; 6]$, $[3; 7]$, $[1; 6]$, $[2; 7]$.

Úloha 3. Vypište užitím Liborova algoritmu posloupnost zápasů pro turnaj, kterého se účastní 9 týmů a ověřte, že v ní nedojde k výskytu stejného týmu ve dvou po sobě jdoucích zápasech.

Úloha 4. Platí Liborův algoritmus obecně pro libovolný počet přihlášených týmů? Pokud ne, tak pro které? A dokážete sestavit pro tyto případy požadovanou posloupnost sami?