

Matematyka ukryta w kartce papieru

Keywords: ciągi i szeregi, stosunek, ciąg geometryczny, ciąg arytmetyczny

Formaty papieru

Międzynarodowy standard rozmiarów papieru jest zdefiniowany w normie ISO 216 i obejmuje dwie główne serie. Seria A obejmuje formaty od A0 do A10, natomiast seria B obejmuje formaty od B0 do B10. Standard ten opiera się na oryginalnej normie DIN 476, która jest używana od 1922 roku w Niemczech. Została ona opracowana przez niemieckiego matematyka i fizyka Waltera Porstmanna.

Obie serie mają dwie podstawowe właściwości:

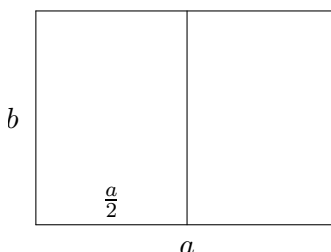
1. Wszystkie formaty są podobnymi prostokątami.
2. Mniejszy format jest tworzony z większego poprzez zmniejszenie go o połowę, tj. podzielenie go na dwa wzajemnie symetryczne prostokąty.¹

Właściwości te nie są arbitralne. Mają one zarówno wartość estetyczną, jak i praktyczne zastosowanie. Na przykład, każdy arkusz papieru w systemie może być wyprodukowany z największego arkusza po prostu przez cięcie, bez generowania jakichkolwiek odpadów.

Każda seria ma również określoną dodatkową właściwość:

- W serii A, powierzchnia największego papieru A0 wynosi 1 m^2 .
- W serii B krótszy bok największego formatu B0 mierzy $1,41 \text{ m}$.

Zadanie 1. Określ współczynnik podobieństwa (współczynnik redukcji) między dwoma kolejnymi formatami papieru, a także znajdź stosunek sąsiednich boków, który musi spełniać każdy format.



Rysunek 1: Zapis długości boków dla zadania 1

Zadanie 2. Oblicz wymiary największego formatu papieru A0, zakładając, że długości jego boków są liczbami całkowitymi w milimetrach, a jego powierzchnia jest jak najbardziej zbliżona do jednego metra kwadratowego.

¹Długości boków formatów utworzonych przez przepołowienie są zaokrąglane w dół do pełnych milimetrów. Najczęściej używany format A4 ma wymiary $210 \times 297 \text{ mm}$.

Zadanie 3. Oprócz własności wspólnych z serią A, seria B ma również tę własność, że krótszy bok największego formatu B0 mierzy dokładnie jeden metr. Wykaż, że jeśli przyjmiemy, że format A0 ma powierzchnię dokładnie jednego metra kwadratowego, a wszystkie formaty mogą mieć wymiary niecałkowite, to dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzi następująca własność:

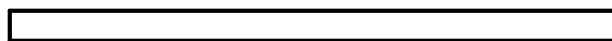
$$S(B(n+1)) = \sqrt{S(A(n)) \cdot S(A(n+1))},$$

tj. obszar formatu $B(n+1)$ jest średnią geometryczną obszarów formatów $A(n)$ i $A(n+1)$.

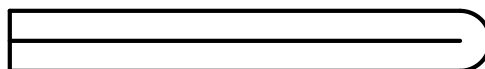
Składanie papieru

Być może zastanawiałeś się kiedyś, ile razy można złożyć kartkę papieru A4 na pół - a może nawet sam spróbowałeś. Ale prawdopodobnie nie przyszło ci do głowy, że matematyk może odpowiedzieć na to pytanie bez składania papieru.

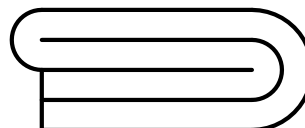
$n = 0$



$n = 1$



$n = 2$



Rozważmy następujący prosty model składania papieru.

Za każdym razem, gdy papier jest składany na pół, jego część jest wykorzystywana do utworzenia zagięcia. Możemy modelować kształt zagięcia jako półkole, którego promień jest równy grubości papieru. Możemy również zaobserwować, że papier układa się w stos przy każdym zagięciu: zaczynamy z pojedynczą warstwą, po pierwszym zagięciu mamy dwie warstwy, po drugim zagięciu cztery warstwy itd. W kolejnych zadaniach będziemy pracować z tym modelem.

Zadanie 4. Jaka będzie grubość stosu papieru biurowego po czterech, siedmiu, dziesięciu, dwudziestu jeden i czterdziestu dwóch złożeniach? Załóżmy, że grubość papieru wynosi $t_0 = 0.1$ mm.

Zadanie 5. Ile papieru jest “tracone” podczas składania?

Zadanie 6. Ile razy można złożyć typowy papier biurowy A4 o grubości 0,1mm?

Jako ciekawostkę dodajmy, że pierwszą osobą, która wyprowadziła równanie z Ćwiczenia 5 była licealistka Britney Gallivan z Kalifornii. Jest ona obecnie rekordzistką Guinnessa w największej liczbie złożań kartki papieru na pół. Udało jej się złożyć papier dwanaście razy. Nie mogła jednak użyć do tego standardowego papieru A4 - użyła papieru toaletowego o długości 1,219 metrów. Co więcej, zastosowała inną technikę składania, zmieniając kierunki składania.

Literatura

1. Niss, Mogens; Bluem Werner. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*, Routledge 2020, 978-1-315-18931-4
2. *Most times to fold a piece of paper*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/494571-most-times-to-fold-a-piece-of-paper>
3. *Wikipedia. Paper size*. https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size