

# Las matemáticas ocultas en una hoja de papel

*Keywords: sucesiones y límites, proporción, sucesión geométrica, sucesión aritmética*

## Formatos de papel

El estándar internacional de formatos de papel está establecido por la norma ISO 216 e incluye dos series básicas. La serie A contiene los formatos A0-A10 y la serie B los formatos B0-B10. Esta norma se basa en la norma original DIN 476, que se utilizaba en Alemania desde 1922. Fue creada por el matemático y físico alemán Walter Porstmann.

Ambas series tienen dos características básicas en común:

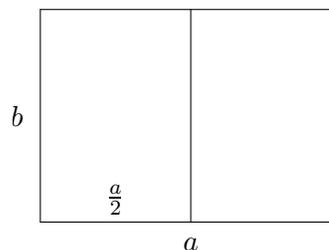
1. Todos los formatos son rectángulos similares entre sí.
2. El formato más pequeño se obtiene dividiendo el más grande por la mitad, es decir, dividiéndolo en dos rectángulos simétricos entre sí.<sup>1</sup>

Estas características no se han elegido al azar. Tienen un significado estético y, además, una utilidad práctica. Por ejemplo, cada hoja de papel del sistema se puede fabricar a partir de la pieza más grande mediante un simple corte, sin que se genere ningún residuo.

Las series A y B tienen además cada una una característica especial adicional:

- En la serie A, además, el tamaño del papel más grande, A0, es de  $1 \text{ m}^2$ .
- En el formato más grande de la serie B, B0, el lado más corto mide  $1 \text{ m}$ .

**Tarea 1.** Determina el coeficiente de similitud (reducción) de dos formatos de papel consecutivos y determina también la relación entre los lados adyacentes, que debe respetar cada uno de los formatos.



**Figura 1:** Descripción de la Tarea 1

<sup>1</sup>Las longitudes de los lados de los formatos resultantes de la división se redondean a milímetros enteros hacia abajo. El formato más utilizado, el A4, tiene unas dimensiones de  $210 \times 297 \text{ mm}$ .

**Tarea 2.** Calcula las dimensiones del formato A0 más grande, si sabes que sus lados tienen longitudes enteras en mm y su área es lo más cercana posible a un metro cuadrado.

**Tarea 3.** La serie de formatos B, además de las propiedades comunes válidas para las series A y B, también tiene la propiedad de que la longitud del lado más corto del formato más grande B0 es igual a un metro. Demuestre que si el formato A0 tiene exactamente un metro cuadrado de superficie y admitimos dimensiones no enteras para todos los formatos, se cumple la relación siguiente para cada número entero no negativo  $n$

$$S(B(n+1)) = \sqrt{S(A(n)) \cdot S(A(n+1))},$$

es decir, el área del formato  $B(n+1)$  es la media geométrica de las áreas de los formatos  $A(n)$  y  $A(n+1)$ .

## Plegado de papel

Quizás alguna vez se haya preguntado cuántas veces se puede doblar una hoja de papel A4 por la mitad y quizás incluso lo hayas probado. Pero probablemente ni se te haya ocurrido que la respuesta a esta pregunta puede darla un matemático sin tener que doblar el papel.

Imaginemos el siguiente modelo sencillo de doblado de papel.

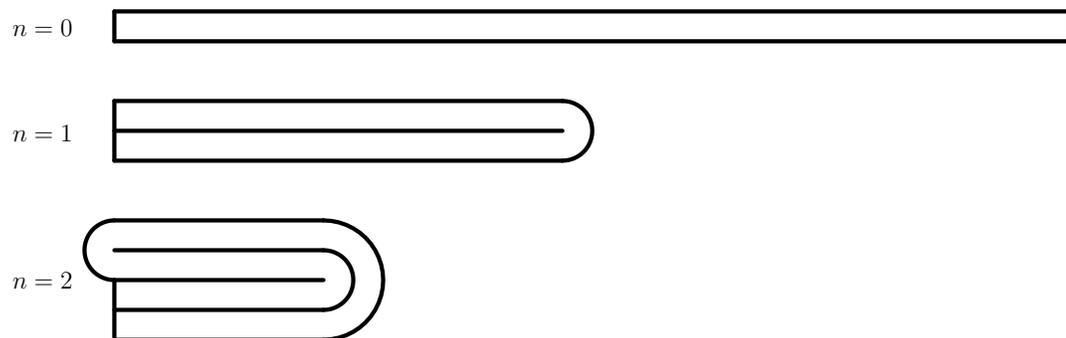


Figura 2: Modelo de plegado del papel

Al doblar el papel por la mitad, siempre se consume una parte del papel para crear el pliegue. Podemos modelar su forma como la mitad de un círculo cuyo radio es igual al grosor del papel. Además, también podemos observar que el papel se superpone al doblarlo. Al principio solo tenemos una capa, después de la primera doblez tenemos dos capas, después de la segunda doblez cuatro capas, etc. En las siguientes tareas trabajaremos con este modelo.

**Tarea 4.** ¿Cuál sería el grosor del papel de oficina apilado después de cuatro, siete, diez, veintiún y cuarenta y dos pliegues? Supongamos que el grosor de nuestra hoja de papel es  $t_0 = 0,1$  mm.

**Tarea 5.** ¿Qué cantidad de papel se «pierde» al doblarlo?

**Tarea 6.** ¿Cuántas veces se puede doblar una hoja de papel de oficina típica de formato A4 con un grosor de 0,1 mm?

Como dato curioso, cabe mencionar que la primera ecuación de la tarea 5 fue deducida por la estudiante de secundaria Britney Gallivan, de California, que actualmente ostenta el récord mundial Guinness por el mayor número de veces que se ha doblado un papel por la mitad. En total, dobló el papel doce veces. Sin embargo, no pudo utilizar papel normal de tamaño A4, sino que utilizó papel higiénico de 1 219 metros de longitud. Además, utilizó otra técnica de plegado (alternando las direcciones).

## Bibliografía

1. Niss, Mogens; Bluem Werner. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*, Routledge 2020, 978-1-315-18931-4
2. *Most times to fold a piece of paper*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/494571-most-times-to-fold-a-piece-of-paper>
3. *Wikipedia. Paper size*. [https://en.wikipedia.org/wiki/Paper\\_size](https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size)