

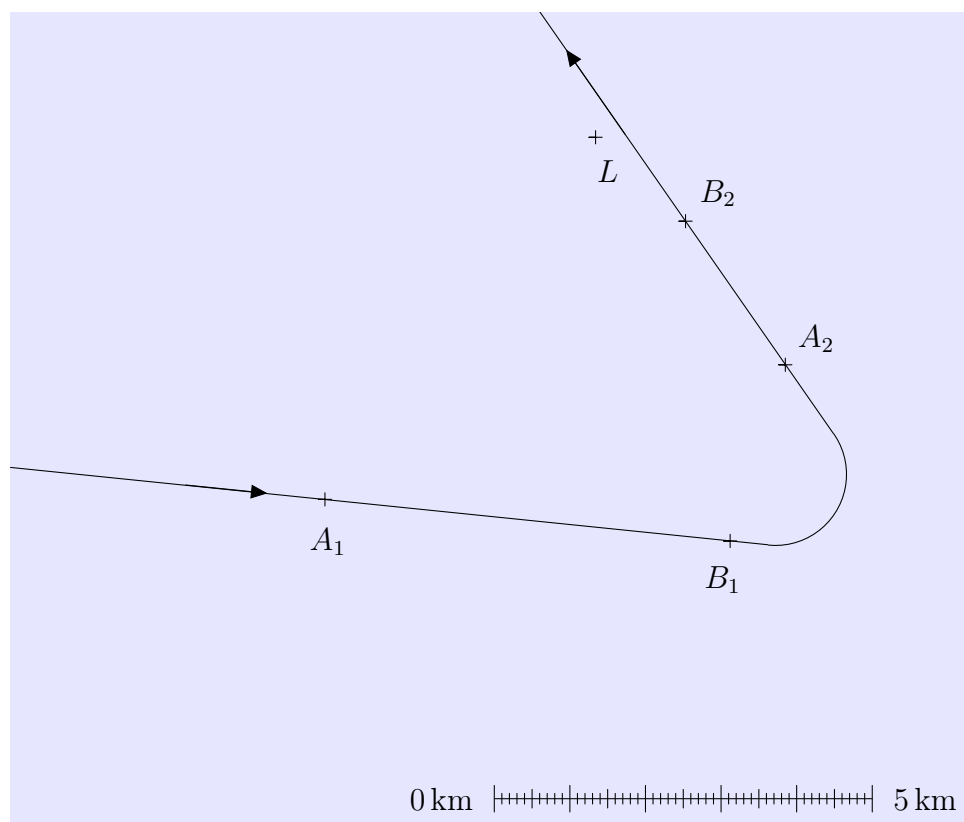
Math4You

2023–2025

## Záchrana trosečníka

Letadlo hledá na otevřeném moři pozici trosečníka, který má na svém voru zařízení vysílající tísňový signál. Zařízení má pouze omezený dosah. Při letu nad mořem posádka letadla signál zachytí, ale po chvíli jej ztratí. Pilot proto letadlo stočí a podaří se mu signál na kratší dobu opět zachytit.

Trajektorie celého letu je i s naznačeným směrem a místy zachycení (body  $A_1$  a  $A_2$ ) a ztrát (body  $B_1$  a  $B_2$ ) signálu znázorněn na mapě.



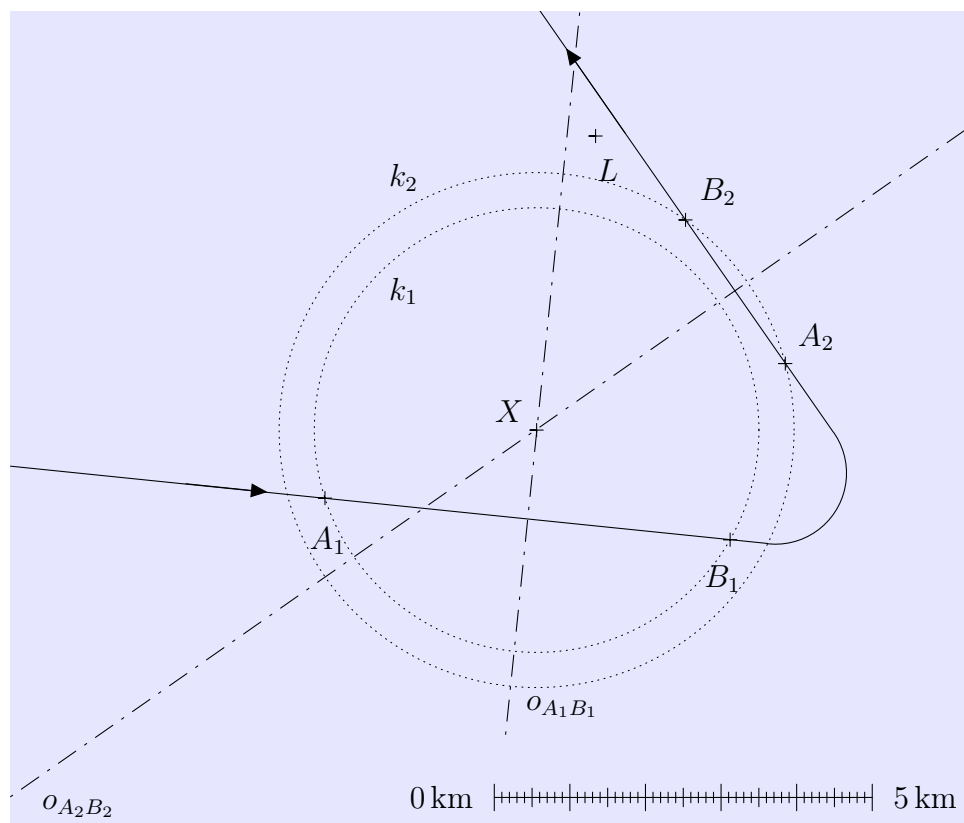
**Obrázek 1:** Trajektorie letu letadla

Během obou dob, kdy posádka přijímala signál, letadlo neměnilo svou výšku, mezi body  $B_1$  a  $A_2$  snížilo svou výšku o 500 m.

**Úloha 1.** Konstrukčně určete v mapě pozici  $X$  trosečníka.

**Řešení.** Omezený dosah trosečnickova tíšňového signálu určuje v prostoru nad hladinou polokouli, jejíž střed je polohou trosečníka. Vodorovné řezy této polokoule jsou kruhy, které se na mapě jeví jako soustředné se středem v bodě  $X$ .

Protože letadlo mezi body  $A_1$  a  $B_1$  nemění svou výšku, je  $A_1B_1$  tětivou jisté kružnice  $k_1$  se středem v bodě  $X$ . Ten tak musí ležet na ose úsečky  $A_1B_1$ . Ze stejného důvodu musí bod  $X$  ležet i na ose úsečky  $A_2B_2$ ; je totiž středem jisté kružnice  $k_2$ , jíž je tato úsečka tětivou.



**Obrázek 2:** Řešení Úlohy 1

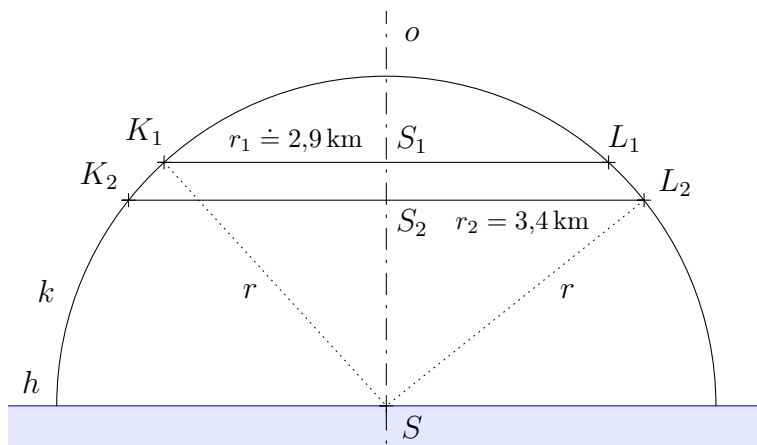
**Úloha 2.** V lokalitě se nachází dopravní loď (pozice  $L$ ). Může také zaznamenat trosečnickův tíšňový signál, nebo je příliš daleko?

- Velikosti úseček  $LX$  a  $A_1X$ ,  $A_2X$  z řešení Úlohy 1 přeneste na měřítko. Užitím takto určených vzdáleností (zaokrouhlených na celý nejmenší dílek stupnice) vyřešte úlohu počtetně.
- Vyjděte z řešení Úlohy 1 a úlohu vyřešte znovu, tentokrát pouze užitím geometrických konstrukcí.

**Řešení.**

- a) K vyřešení úlohy potřebujeme znát dosah trosečnickova zařízení, což je poloměr  $r$  polokoule zmíněné v řešení předešlé úlohy. Přenesením úseček  $A_1X$  a  $A_2X$  na měřítko a zaokrouhlením jejich délek na desetiny kilometru dostáváme  $|A_1X| \doteq 2,9$  km a  $|A_2X| \doteq 3,4$  km. Tyto délky jsou zřejmě poloměry  $r_1$  a  $r_2$  kružnic  $k_1$  a  $k_2$ .

Uvažme takový průmět polokoule, ve kterém se kružnice  $k_1$  a  $k_2$  zobrazí po řadě jako rovnoběžné úsečky  $K_1L_1$  a  $K_2L_2$  takové, že mají stejnou osu  $o$ , jejich délky jsou po řadě  $2r_1$  a  $2r_2$  a jejich vzdálenost je 0,5 km. Označme dále střed polokoule  $S$ , střed úsečky  $K_1L_1$  jako  $S_1$  a střed úsečky  $K_2L_2$  jako  $S_2$ . Viz obrázek, ve kterém je pro názornost vyznačena také mořská hladina přímkou  $h$ .



**Obrázek 3:** Pomocný průmět polokoule při řešení Úlohy 2a)

Z Pythagorovy věty aplikované na trojúhelníky  $SS_1K_1$  a  $SS_2L_2$  vyplývají rovnosti

$$\begin{aligned} r^2 &= r_1^2 + |SS_1|^2 \\ r^2 &= r_2^2 + |SS_2|^2. \end{aligned}$$

Platí však  $|SS_1| = |SS_2| + 0,5$ . Dosazením do první rovnice a porovnáním obou stran dostáváme lineární rovnici s jedinou neznámou  $|SS_2|$ , kterou vyřešíme:

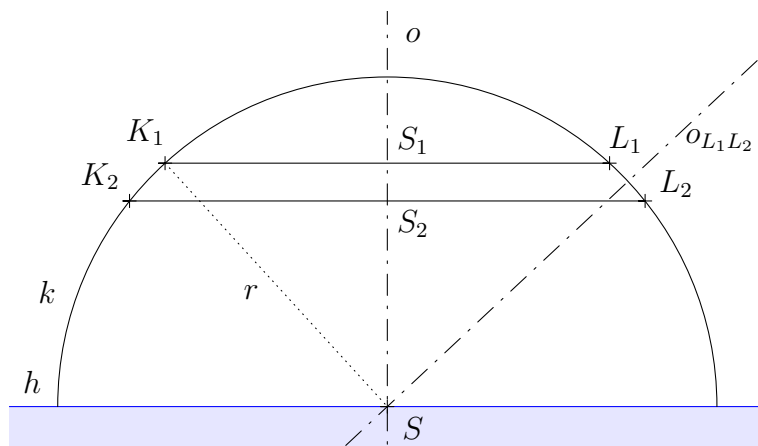
$$\begin{aligned} r_2^2 + |SS_2|^2 &= r_1^2 + (|SS_2| + 0,5)^2 \\ |SS_2| &= r_2^2 - r_1^2 - 0,25 \end{aligned}$$

Vyjádřením  $r$  z druhé rovnice a následným dosazením dostáváme

$$r = \sqrt{r_2^2 + (r_2^2 - r_1^2 - 0,25)^2} \doteq 4,5 \text{ km.}$$

Vzdálenost lodi od trosečnicka je délkou úsečky  $LX$ . Přenesením této úsečky na měřítko vyčteme  $|LX| \doteq 4,0$  km, úsečka je tedy kratší než dosah  $r$  trosečnickova signálu. Loď proto může tento signál zaznamenat.

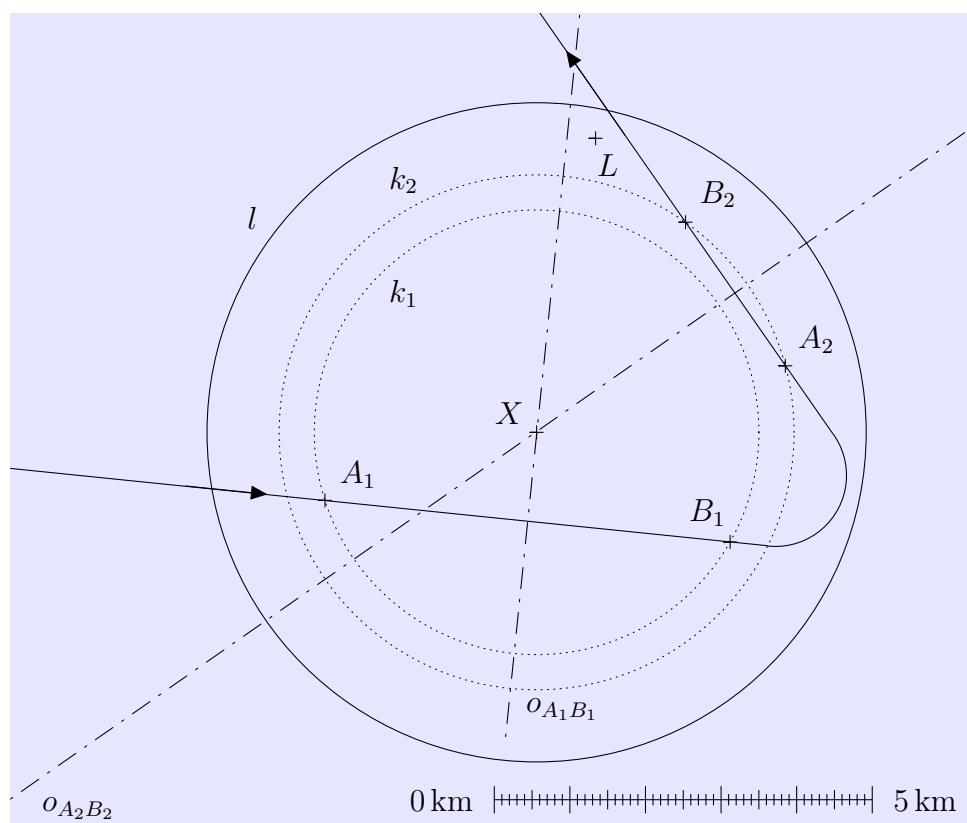
- b) K odvození konstrukčního řešení úlohy (tj. sestrojení poloměru  $r$  polokoule) využijeme stejný pomocný průmět polokoule jako v Úloze 2a. Střed polokoule  $S$  je průsečíkem společné osy  $o$  úseček  $K_1L_1$  a  $K_2L_2$  a osy úsečky  $L_1L_2$ , neboť ta je tětivou obrysové půlkružnice  $k$ . Hledaný poloměr  $r$  je pak např. velikostí úsečky  $SK_1$ , viz obrázek.



**Obrázek 4:** Pomocný průmět polokoule při řešení Úlohy 2b)

Při samotném provedení konstrukce přenášíme vzdálenosti  $r_1$  a  $r_2$  z řešení Úlohy 1 (kde připomínáme, že platí  $r_1 = |A_1X|$  a  $r_2 = |A_2X|$ ), vzdálenost středů kružnic  $|S_1S_2| = d_{0,5}$ , kde  $d_{0,5}$  označuje vzdálenost na mapě odpovídající 0,5 km, kterou nanášíme z měřítka.

Průmět polokoule na mapě ohraničuje kružnice  $l$  se středem v bodě  $X$  a poloměrem  $r$ , který přeneseme z pomocného průmětu. Po sestrojení této kružnice je vidět, že se loď nachází v dosahu nouzového signálu.



**Obrázek 5:** Řešení Úlohy 2b)