

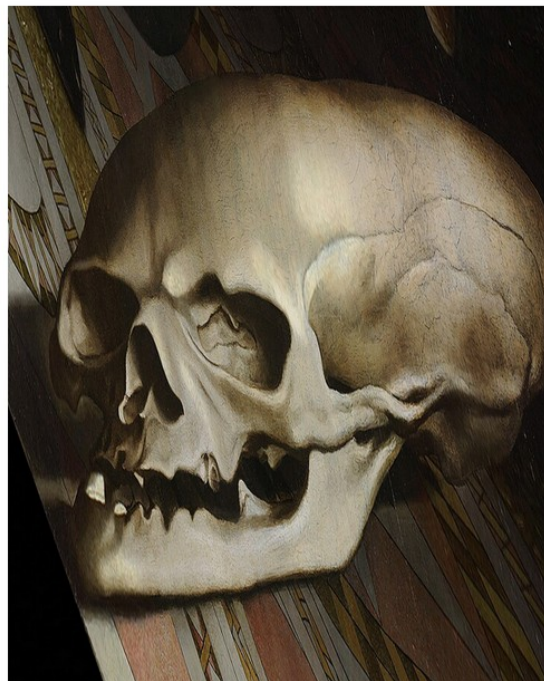
Math4You

2023–2025

Anamorfózy

Anamorfózy ve výtvarném umění

Anamorfóza je druh vizuálního triku či umění, při němž část roviny nebo prostoru viděná z určitého úhlu odhaluje skrytý obraz. Anamorfóza závisí na tom, zda pozorovatel najde správné místo, odkud se dívat. Tento druh umění má dlouhou a bohatou historii. Jedním z nejznámějších obrazů využívajících anamorfózy jsou Velvyslanci (1533) německého malíře Hanse Holbeina mladšího (1497 – 1543).



Obrázek 1: Velvyslanci

V dolní části obrazu je namalován jistý podivný protáhlý objekt. O co se jedná je možné rozeznat pouze pokud se postavíte ke zdi u pravého rámu obrazu a zadíváte se tím směrem. Pokud najdete správnou pozici odkud se dívat, uvidíte, že jde o lebku.

Anamorfní umění může využívat také odrazy obrazů nebo soch ve válci¹.

Ke konci 20. století zažilo anamorfní umění velké oživení ve fotografii, kresbě a velkoplošných instalacích. Někteří umělci tvoří anamorfní obrazy z předmětů denní potřeby jako elektronika, nebo obuv a ponožky². S anamorfózami se můžeme potkat i v rámci street artu. Často jde o kresby na chodníku, silnici či na zdi, které náhodného kolemjdoucího překvapí a na okamžik zarazí. Může jít třeba o kresbu, která vypadá jako díra v zemi, do které hrozí pád, nohy vykukující ze zdi či kanálu a podobně. Anamorfózy založené na středovém promítání jsou přesvědčivější, pokud je sledujeme jedním okem nebo přes objektiv. Pokud je ale střed promítání dostatečně daleko od pozorovaného objektu, je dobře vystínován nebo jeho okolí nějak podporuje dojem prostoru, je iluze přesvědčivější

Praktické využití

Ve filmovém průmyslu se k natáčení filmů někdy používají kamery s anamorfními čočkami. Ty byly původně navrženy z toho důvodu, aby širokoformátové snímky plně využívaly plochu standardních filmových políček s výškou 35mm. Jinak by širokoformátové snímky ponechaly horní a spodní část rámečku nevyužité. Přes příchod digitálních snímačů s velkým rozlišením se anamorfní objektivy používají pro unikátnost výsledného obrazu i v dnešní době.

V některých městech zaváděly přechody pro chodce, které v určitém okamžiku vypadaly z pohledu příjezdějícího řidiče jako levitující hranoly. Po krátké zkušební době byly většinou zrušeny, protože před nimi řidiči brzdili příliš prudce.

Techniku anamorfní projekce můžeme vidět na některých sportovních stadionech, kdy se používá k propagaci firemních značek, které jsou namalovány na hrací plochu. Z úhlu televizní kamery se nápis jeví jako nápisy stojící svisle v rámci hrací plochy.

Anamorfózy základních těles

V následujícím textu a příkladech vytvoříme anamorfózy základních těles pomocí středového promítání do roviny. Rovině, ve které tyto anamorfní obrazy budeme rýsovat budeme říkat průmětna. Průmětnou pro nás bude papír, na který budeme rýsovat. Tím budeme omezeni co se týče velikosti objektů. Vzniklé obrazy pak budeme pozorovat okem kamery přes mobil nebo fotoaparát. Pokud máte možnost, můžete anamorfní obrazy vytvářet venku, ideálně mimo komunikace.

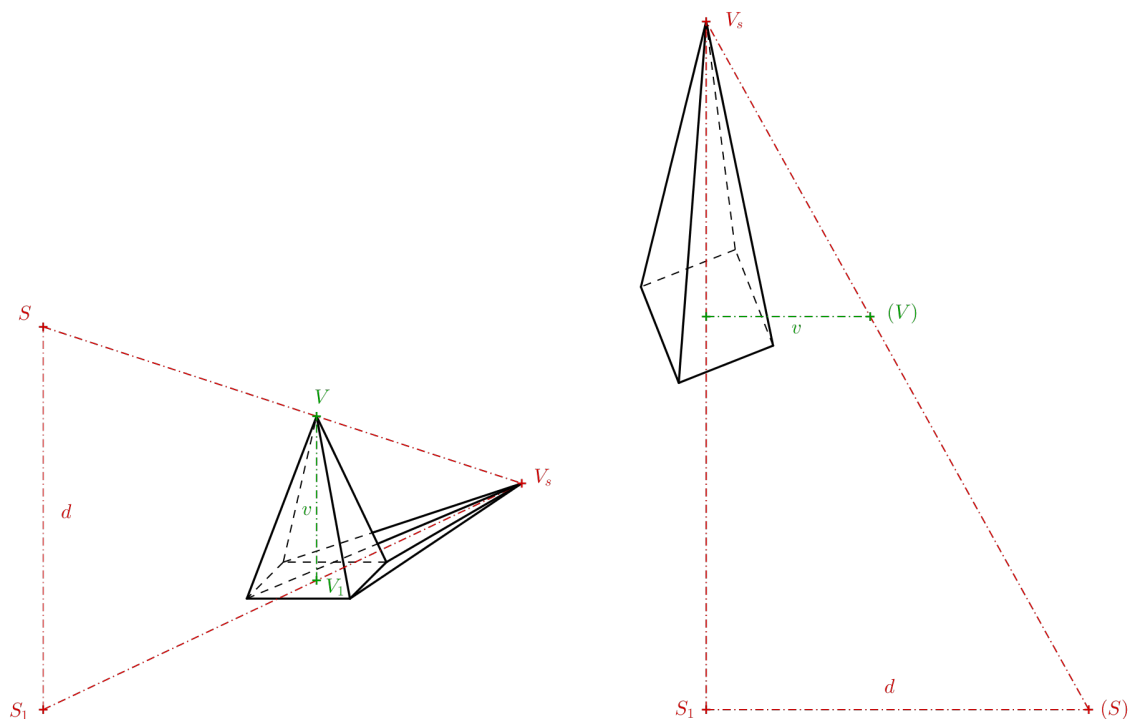
Jehlan a kužel

Asi nejjednodušší je vytvořit anamorfní obrazy jehlanu a kuželu, pokud ovšem jejich podstavy leží v průmětnách. Pojďme si princip vysvětlit na jehlanu. Kromě tělesa je třeba zadat i střed promítání S a jeho kolmý průmět do průmětny S_1 . Střed promítání si můžeme představit jako oko pozorovatele. Kolmý průmět jako místo, kde pozorovatel stojí. Vzdálenost $S_1S = d$ je tedy vzdálenost středu promítání od průmětny. U pravidelného čtyřbokého jehlanu obdobně označíme jeho vrchol jako V a kolmý průmět vrcholu do průmětny V_1 . Průsečík přímky SV (takzvaného promítacího paprsku) s průmětnou pak získáme jako průsečík přímky SV s přímkou S_1V_1 (viz následující obrázek nalevo). Takový obrázek je

¹https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anamorphic_frog_sculpture_by_Jonty_Hurwitz.jpeg.

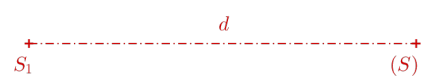
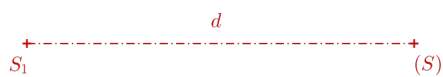
²https://www.youtube.com/watch?v=y___zPc3MZm4.

dobré si načrtnout když přemýšlíme, jak iluze funguje, a jak bude středový průmět vypadat. Pro určení anamorfózy jehlanu ale tento prostorový obrázek třeba není.



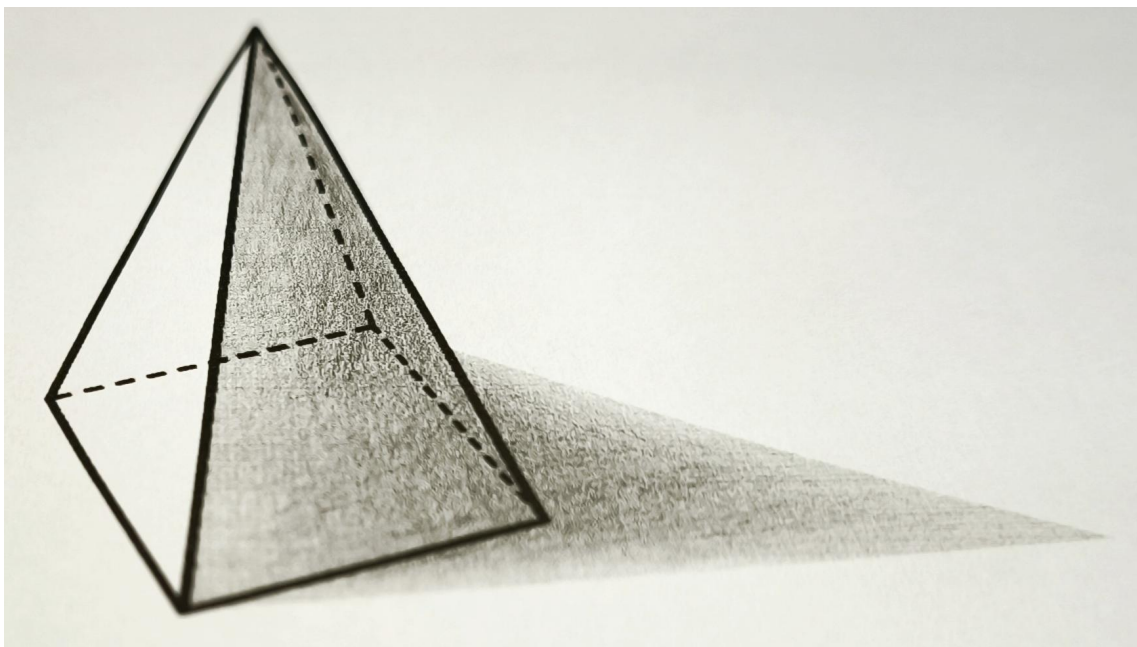
Obrázek 2: Anamorfóza jehlanu

Důležitý je pro nás pouze lichoběžník S_1V_1VS , který si můžeme znázornit i v průmětně jako lichoběžník $S_1V_1(V)(S)$ (předchozí obrázek napravo). Body, které byly předtím v prostoru mimo průmětnu (body V a S) nyní v průmětně uvádíme v závorce, abychom je vzájemně odlišili. Body (V) a (S) vznikly pootočením roviny S_1VS o 90° do průmětny kolem přímky S_1V_1 . Pokud známe výšku jehlanu, vzdálenost oka pozorovatele od průmětny, a vzdálenost S_1V_1 , pak můžeme lichoběžník narysovat. Protažením jeho stran, které nejsou vzájemně rovnoběžné, dostaneme průsečík V_s .



Obrázek 3: Anamorfóza jehlanu

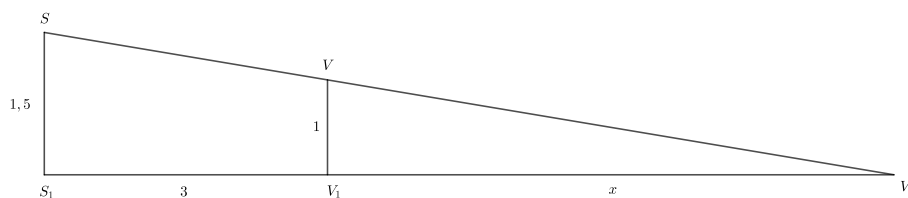
Výsledek (viz předchozí obrázek nalevo) je vhodné nakreslit bez pomocných čar. Můžeme se na něj podívat okem kamery. Při prohlídce přes oko kamery zjistíme, že neviditelné hrany dolní podstavy je vhodné nakreslit hustší čárkovanou čarou než průmět neviditelné boční hrany. Pokud chceme, aby jehlan vypadal věrohodně, obrázek vystínujeme. Stín můžeme jen odhadnout, vržený stín vrcholu si můžeme zvolit. Anamorfóza jehlanu je hotová, kameru fotoaparátu (aby iluze fungovala), je třeba nastavit nad bod S_1 ve výšce rovné vzdálenosti $S_1(S)$. Výsledný obraz přes oko kamery by měl vypadat přibližně jako na následujícím obrázku.



Obrázek 4: Anamorfóza jehlanu, pohled kamerou ze středu S

Úloha 1. Chceme na zem nakreslit tvar, který bude v prostoru vypadat jako kužel o výšce 1m a s podstavou o poloměru $r = 0,4\text{m}$. Střed promítání budeme opět značit S a S_1 jeho kolmý průmět. Předpokládáme, že oko průměrného pozorovatele je ve výšce 150cm od země. V jaké vzdálenosti musí být V_s od V_1 (V_s je středový průmět vrcholu kuželu do průmětny, V_1 je kolmý průmět vrcholu kuželu do průmětny)?

Řešení. Trojúhelníky S_1V_sS a V_1V_sV jsou podobné.



Obrázek 5: Výška kuželu

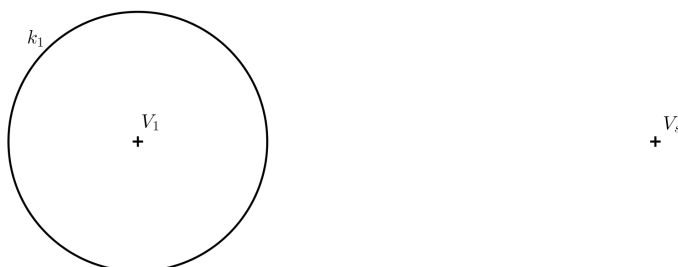
Platí tedy, že poměry příslušných stran, jsou si rovny:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+3}{1,5},$$

$$1,5x = x+3,$$

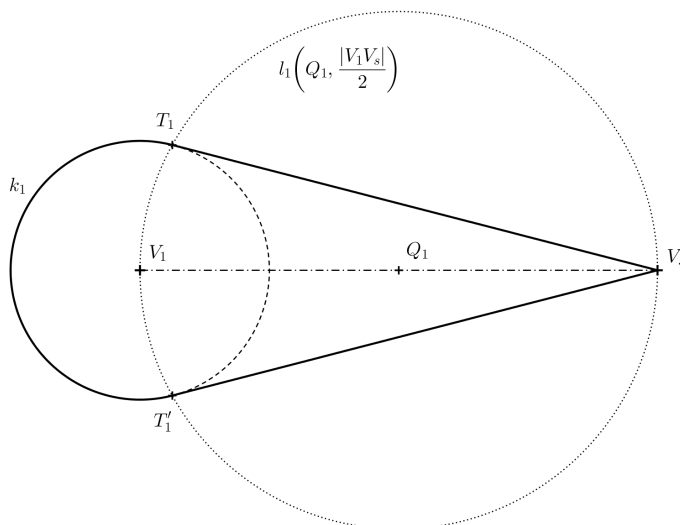
odkud dostáváme $x = 6$. Vzdálenost bodu V_s od V_1 musí být 6 metrů.

Úloha 2. Máme danou podstavnu kružnici k se středem V_1 a bod V_s (zadání viz obrázek). Představme si nyní v prostoru rotační kužel s podstavnu kružnicí k a střed promítání S , takové že V_s je středový průmět vrcholu kuželu. V_1 je kolmý průmět vrcholu kuželu do průmětny (na papír). Určete obrys středového průmětu kuželu.



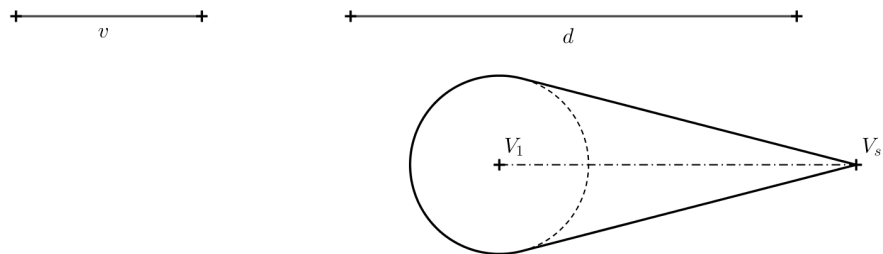
Obrázek 6: Zadání úlohy 2

Řešení. Obrys kuželu bude (kromě části podstavné kružnice) tvořen tečnami z vrcholu V_s . Přesněji to budou spojnice bodu V_s s body dotyku T a T' , které získáme jako průsečíky Thaletovy kružnice l nad průměrem V_1V_s s kružnicí k .



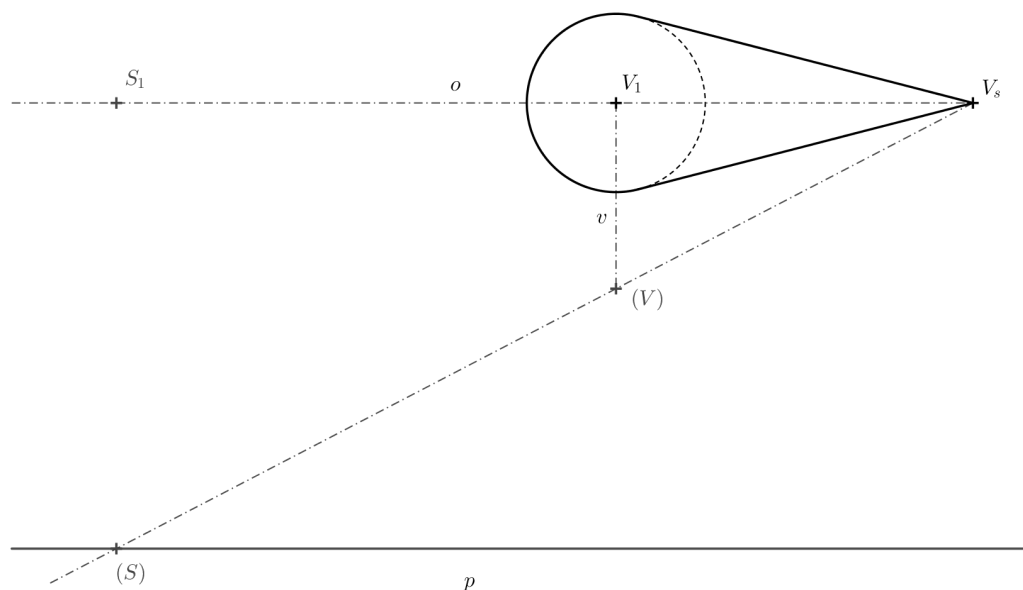
Obrázek 7: Řešení úlohy 2

Úloha 3. Pro řešení předchozí úlohy určete polohu středu S (pomocí S_1 a (S)), jestliže známe výška v prostorového kuželu a $d = |S_1S|$. Zadání viz následující obrázek, délky v a d jsou dány pomocí úseček.



Obrázek 8: Zadání úlohy 3

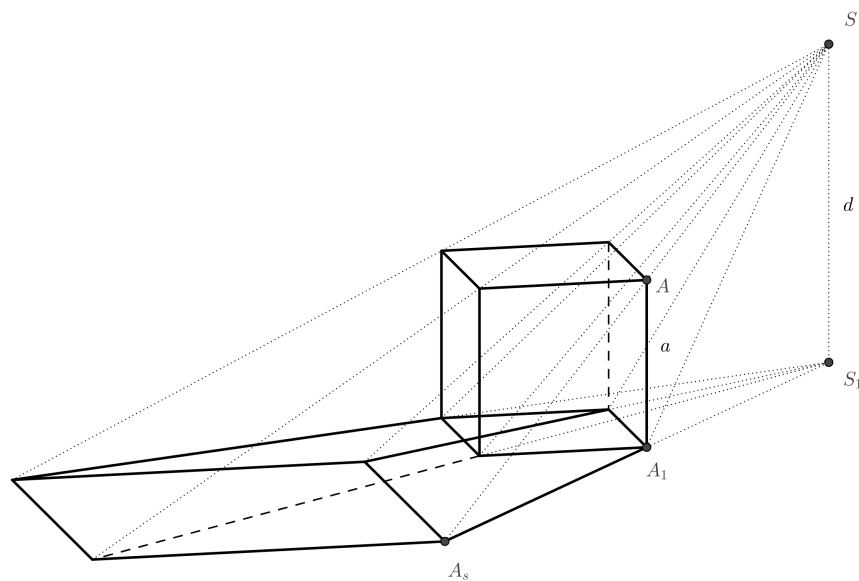
Řešení. Bod S musí splňovat dvě podmínky. Jeho vzdálenost od průmětny je rovna d a musí ležet na spojnici VV_s . Střed S i bod V leží v rovině kolmé na průmětnu. Průsečnice těchto dvou rovin je přímka $o = V_1V_s$. Kolem této přímky můžeme vrchol V pootočit o 90° do průmětny. Otočený obraz bodu V označíme (V) , musí ležet ve vzdálenosti v od bodu V_1 na kolmici na osu o . Ve vzdálenosti d od osy $o = V_1V_s$ narýsujeme přímku p . Bod (S) musí ležet na průsečíku přímky p a $(V)V_s$



Obrázek 9: Řešení úlohy 3

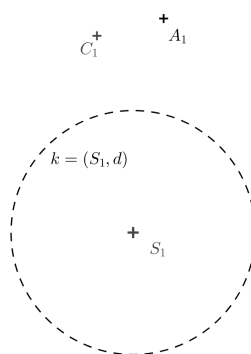
Hranol a válec

Při anamorfním zobrazení hranolu a válce budeme využívat stejnolehlost. Proč tomu tak je si vysvětlíme na příkladu krychle na následujícím obrázku. Mezi horní podstavou krychle a jejím průmětem je v prostoru vztah stejnolehlosti se středem S (plyne z podobnosti trojúhelníků). Protože dolní podstava krychle je současně kolmým průmětem horní podstavy do průmětny, funguje pak vztah stejnolehlosti mezi dolní podstavou a středovým průmětem horní podstavy se středem stejnolehlosti S_1 .



Obrázek 10: Anamorfóza krychle

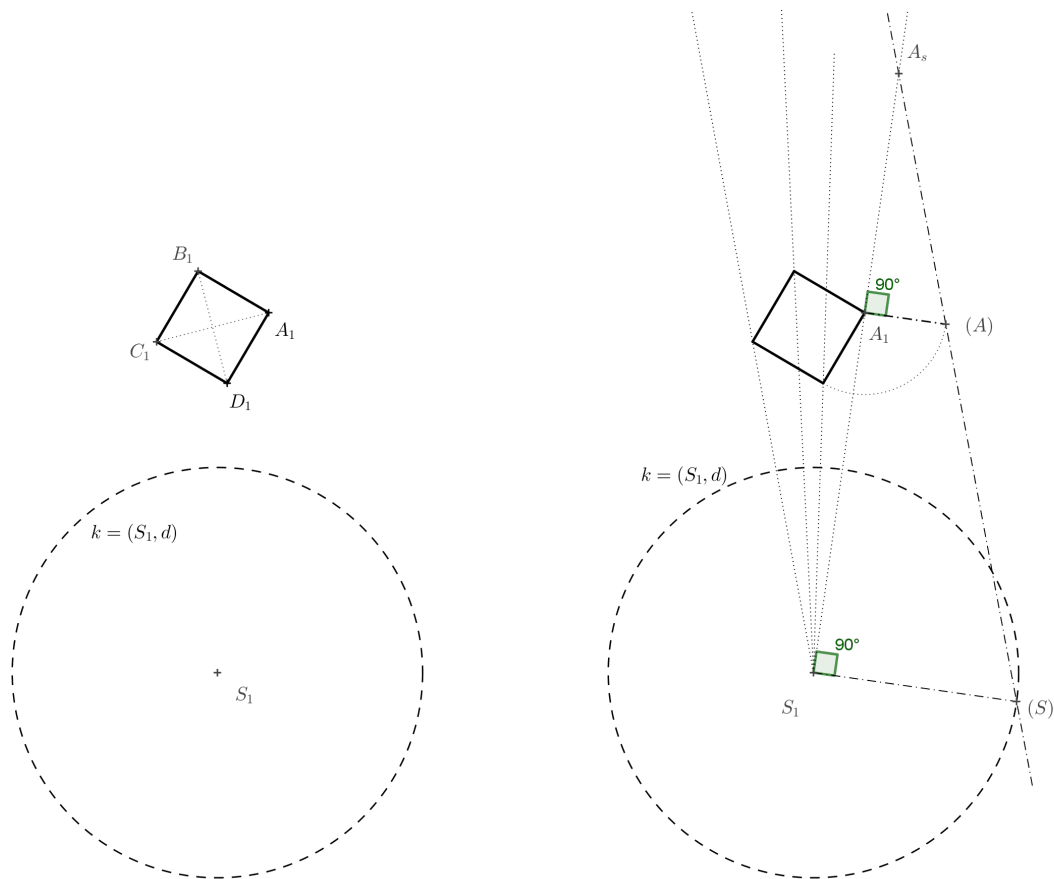
Úloha 4. Určete anamorfózu krychle. Čtverec dolní podstavy je dán protilehlými vrcholy A_1, C_1 . Dále je dána poloha bodu S_1 (kolmý průmět středu promítání S), délka d je zadána poloměrem kružnice k .



Obrázek 11: Zadání úlohy 4

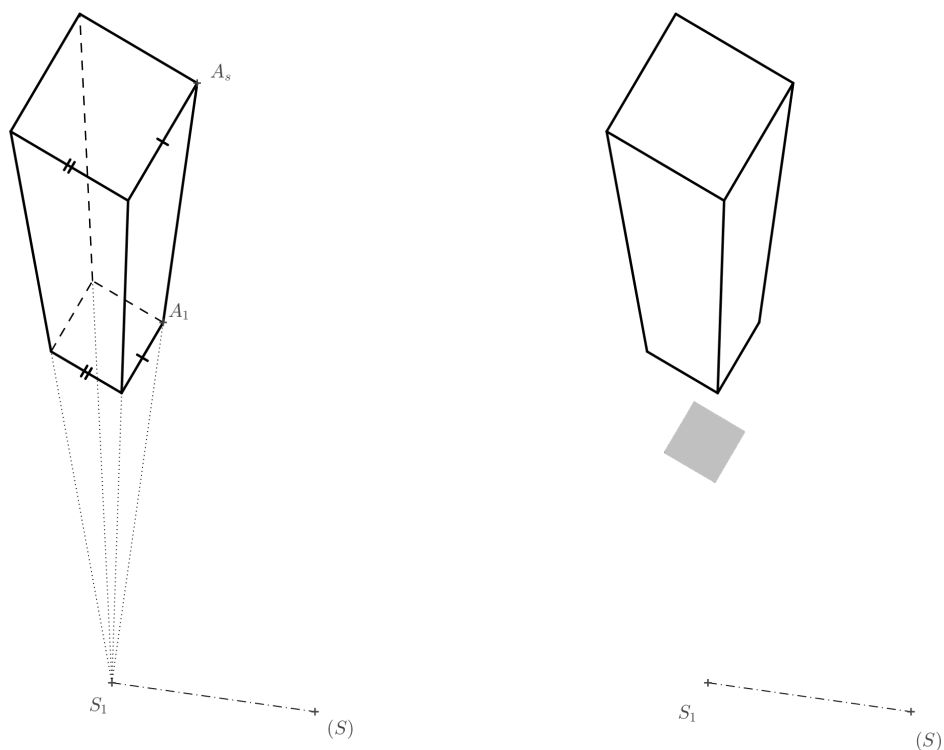
Řešení. Sestrojíme čtverec $A_1B_1C_1D_1$ s úhlopříčkou A_1C_1 . Na obrázku .. vidíme, že bod A_s je průsečík přímk AS a A_1S_1 . Známe délky rovnoběžných stran lichoběžníka A_1S_1SA , takže můžeme opět provést jeho pootočení kolem strany A_1S_1 o 90° do průmětny. Délka $S_1(S) = d$ je dána poloměrem kružnice

k a délka $A_1(A) = a$ je délka strany čtverce $A_1B_1C_1D_1$. Bod A_s je průsečík přímky S_1A_1 a přímky $(S)(A)$.



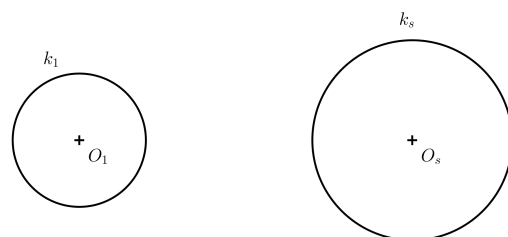
Obrázek 12: Zobrazení čtverce dolní podstavu a určení bodu A_s

Čtverec s vrcholem A_s poté dorýsujeme pomocí stejnolehlosti. Boční hrany krychle odpovídají spojnicím vrcholů čtverců, které si odpovídají ve stejnolehlosti. Máme hotovo. Pokud ale chceme podpořit iluzi krychle, můžeme narýsovat ještě čtverec, který odpovídá čtverci $A_1B_1C_1D_1$ ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $0 < k < 1$. Pokud ho vybarvíme šedě, určíme tím stín krychle (při směru osvětlení shora) a vytvoříme tím dojem, že krychle levituje v prostoru.



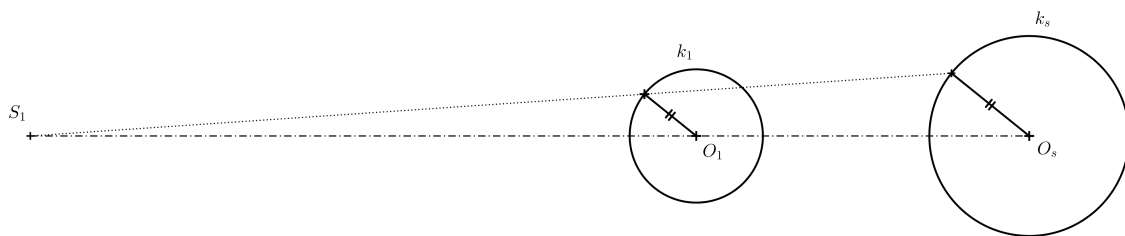
Obrázek 13: Řešení úlohy 4 a jeho vylepšení

Úloha 5. Mějme dány dvě různě velké kružnice, zadání viz následující obrázek. Určete střed jejich stejnolehlosti S_1 a jejich společné tečny tak, aby výsledný obrázek byl anamorfózou válce.



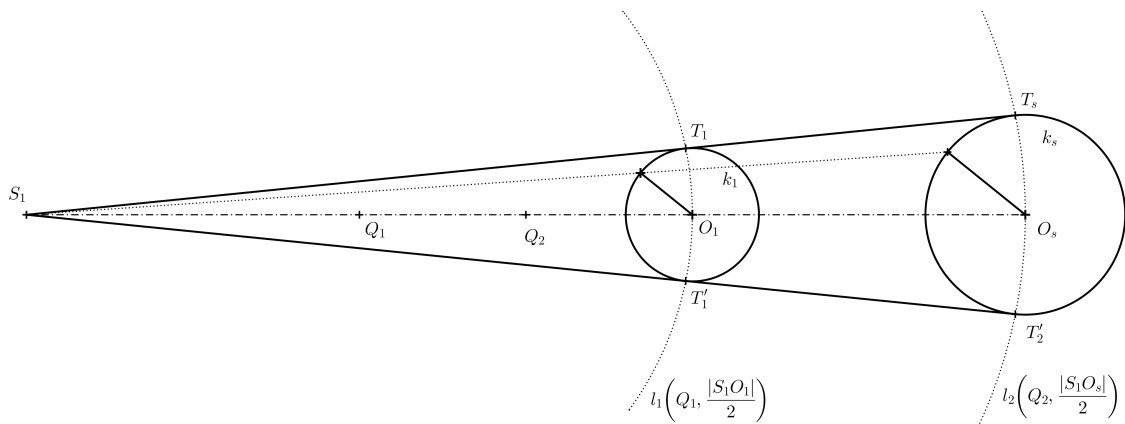
Obrázek 14: Zadání úlohy 5

Řešení. Každé dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry jsou stejnohlé dvěma způsoby, nás zajímá ten způsob, kdy koeficient stejnohllosti je kladný. Nejprve sestojíme střed stejnohllosti (viz následující obrázek).



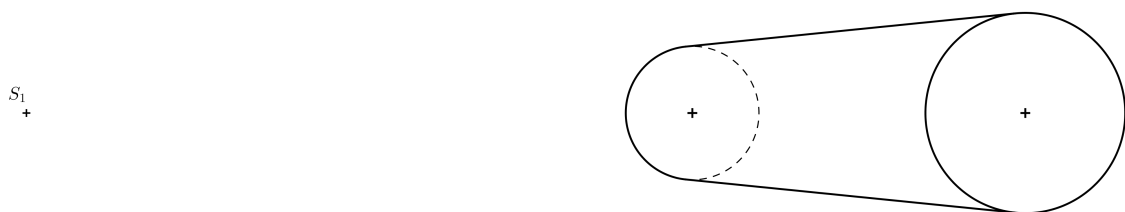
Obrázek 15: Nalezení středu stejnohllosti

Body dotyku najdeme na Thaletových kružnicích nad průměry S_1O_1 a S_1O_s . Teprve poté rýsujeme tečny (pokud rýsujeme pomocí pravítka a kružítko).



Obrázek 16: Určení společných tečen (řešení pro $k > 0$)

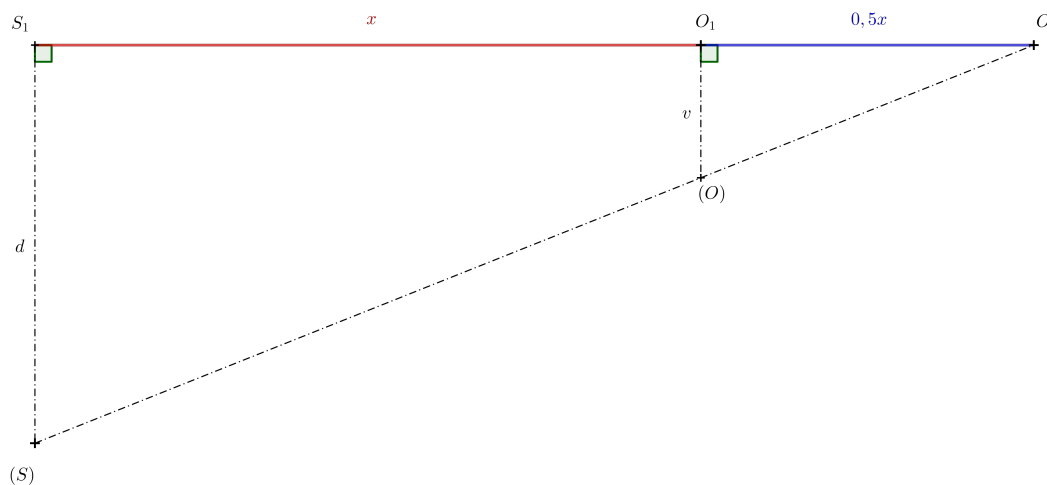
Výsledná anamorfóza válce je na následujícím obrázku.



Obrázek 17: Zobrazení výsledku úlohy 5

Úloha 6. Koeficient stejnolehlosti $H(S, k)$ v předchozím příkladu, která zobrazuje O_1 na O_s je $k = 1,5$. Jaký musí být poměr $d : v$, kde $d = |S_1S|$ a $v = |O_1O|$ (výška pomyslného válce v prostoru), aby prostorová iluze fungovala?

Řešení. Označme si $x = |S_1O_1|$. Díky koeficientu stejnolehlosti pak víme že $|S_1O_s| = 1,5x$. Z toho plyne $|O_1O_s| = 0,5x$. Poté opět využijeme podobnosti trojúhelníků $S_1O_s(S)$ a $O_1O_s(O)$ na následujícím obrázku.



Obrázek 18: Pomocný obrázek k úloze 6

$$\frac{d}{v} = \frac{1,5x}{0,5x} = 3$$

Poměr $d : v$ musí být roven $3 : 1$

Odkazy a literatura

Literatura

<https://en.wikipedia.org/wiki/Anamorphosis>

Zdroje obrázků

- Velvyslanci https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hans_Holbein_the_Younger_-_The_Ambassadors_-_Google_Art_Project.jpg
- Lebka (detail obrazu Velvyslanci při pohledu ze správného místa) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Holbein_Skull.jpg