

Vektory

Keywords: analytická geometria, vektory, skalárny súčin

Vektory predstavujú dôležitý pojem nielen v matematike, ale aj vo fyzike či informatike. V matematike sa nimi zaoberá lineárna algebra.

Normálne možno vektor definovať ako prvok vektorového priestoru, čo je abstraktná algebraická štruktúra so zavedenými operáciami sčítania vektorov a násobenia vektora skalárom. Typickým príkladom takéhoto priestoru je množina všetkých usporiadaných n -tíc reálnych čísel, teda napríklad dvojíc alebo trojíc, s príslušnými operáciami.

Na strednej škole sa však vektor často predstavuje názorne ako množina všetkých orientovaných úsečiek s rovnakou veľkosťou (dĺžkou) a rovnakým smerom.

Vo fyzike majú vektory zásadný význam pri popise veľkosti a smeru rôznych veličín, napríklad rýchlosti, zrýchlenia, síl pôsobiacich na teleso alebo elektromagnetických polí.

V informatike sa pod pojmom vektor spravidla rozumie usporiadaný zoznam prvkov (nielen čísel), pričom tento dátový typ sa používa ako efektívny spôsob ukladania a spracovávania údajov, napríklad v aplikáciách strojového učenia.

Existuje však odvetvie informatiky, kde sa vektory uplatňujú v rovnakom význame, ako ho poznáme zo stredoškolskej matematiky alebo fyziky – je ním prostredie počítačových hier.

Schopnosť pracovať s vektormi patrí k najzákladnejším predpokladom programátora hier.

V závislosti od toho, či ide o 2D alebo 3D hru, majú vektory dve alebo tri súradnice. Uplatňujú sa pri reprezentácii geometrických vlastností objektov v hernom svete.

Zjednodušene sa preto obmedzíme na dvojrozmerný priestor, teda rovinu, a budeme pracovať v kartézskej súradnicovej sústave.

Poznámka: Takých základných stavebných kameňov je potrebných samozrejme oveľa viac. Okrem príslušného programovacieho nástroja je potrebné poznať aj matice transformácií, ako je posunutie, otočenie a podobne.

V nasledujúcich cvičeniach sa však sústredíme výhradne na operácie s vektormi.

Body a smerové vektory

V nasledujúcich príkladoch budeme rozlišovať zadanie bodov (v hranatých zátvorkách) a vektorov (v okrúhlych zátvorkách). Súčasne však budeme mať na pamäti, že bod $A = [a_1; a_2]$ môžeme interpretovať aj ako koncový bod vektora $\vec{a} = (a_1; a_2)$, ktorý má za počiatočný bod počiatok súradnicovej sústavy.

Bod je teda určený svojimi súradnicami, avšak na rozdiel od vektora ho neurčuje veľkosť (dĺžka) a smer. Bod $[0, 0]$ alebo vektor $(0, 0)$ budeme chápať ako stred herného sveta.

Častým prípadom využitia vektorov je výpočet takého vektora, ktorý vyjadruje vzťah jedného objektu voči druhému. Uvažujme body $A = [a_1; a_2]$ a $B = [b_1; b_2]$. Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ obvykle nazývame smerový vektor.

Ak budú body A a B v hre reprezentovať postavy, tak vektor $\overrightarrow{AB}$ určuje smer a jeho veľkosť potom vzdialenosť, ktorú postava A musí prejsť, aby sa dostala k postave B .

Úloha 1. V dvojrozmernej hre máme programátora, ktorý ovláda postavu A a hráča, ktorý ovláda postavu B . Na začiatku sa obe postavy nachádzajú na rôznych miestach, pričom sú pre jednoduchosť reprezentované bodmi A a B . Postava B sa následne pohybuje po dráhe určenou postupným posunutím v smeroch vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Úlohou je vyjadriť vektor, ktorý musí programátor určiť na to, aby postava A mohla zasiahnuť postavu B .

Pri každej postave v hernom svete sa využíva aj vektor vo význame usporiadaného zoznamu položiek. Jednou z položiek môže byť napríklad meno postavy, jej úloha či poloha. Ďalšou vlastnosťou každej postavy v hernom svete je smer, ktorým je natočená. Na určenie tohto smeru sa používa takzvaný normalizovaný smerový vektor, teda smerový vektor s dĺžkou 1.

Normalizované smerové vektory sa zároveň využívajú na uchovávanie informácie o tom, akým smerom sa nachádzajú ostatné postavy alebo objekty. *Poznámka:* Dôvod, prečo sa v hernom svete používajú práve normalizované verzie smerových vektorov, si vysvetlíme neskôr.

Úloha 2. Majme postavy $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$, $C = [4; -1]$. Určite normalizované smerové vektory postáv A a B smerom k ostatným postavám. Nakreslite zodpovedajúci obrázok.

Úloha 3. Majme polohu postavy $A = [a_1; a_2]$ a postavy $B = [b_1; b_2]$ ktoré sa nachádzajú na rôznych miestach. Určte: a) normalizovaný smerový vektor $\widehat{BA}$, b) kde sa bude postava A nachádzať potom, čo prejde tri jednotkové dĺžky smerom k postave A ?

Skalárny súčin a jeho použitie

Výsledkom skalárneho súčinu dvoch vektorov je skalár, teda reálne číslo. V programovaní hier má dôležité miesto skalárny súčin normalizovaných vektorov.

Úloha 4. Určte skalárne súčiny normalizovaných smerových vektorov z riešenia Úlohy 2.

Úloha 5. Pozorovateľ v počiatku súradnicovej sústavy sa pozerá na objekt $A = [3; 1]$, Určte uhol α o ktorý sa musí otočiť, aby smer jeho pohľadu mieril priamo na objekt $B = [1; 2]$.

Ak by boli v zadaní úlohy uvedené normalizované smerové vektory, ich skalárny súčin by sa rovnal priamo $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Toto je dôvod, prečo sa smery pohľadov postáv a smerové vektory medzi postavami zapisujú v zoznamoch položiek v normalizovanom tvare. Skalárny súčin môžeme s výhodou použiť aj na riešenie nasledujúceho problému. Predstavme si, že vytvárame hru, v ktorej sa hráč snaží skryť pred strážami. Bude nás teda zaujímať, či strážnik vidí alebo nevidí jednotlivých hráčov. Pre väčšiu realističnosť chceme, aby mal strážnik zorné pole, v ktorom danú postavu vidí. U človeka sa udáva veľkosť zorného uhla pre videnie oboma očami približne 180° . To by bolo pre nášho strážnika priveľa, takže povedzme, že chceme, aby jeho zorný uhol bol napríklad 170° .

Results matter!

Úloha 6. Zorný uhol strážnika G je 170° , Aké hodnoty budú nadobúdať skalárne súčiny medzi jeho smerom pohľadu $\vec{d}$ a normalizovanými smerovými vektormi k objektom, ktoré strážnik vidí?

Úloha 7. Určte, či strážnik, umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy, vidí hráča $A = [3; -2]$, ak smer pohľadu strážnika je $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a hranica pre obmedzenie zorného poľa je daná hodnotou 0, 1.