

# Wektory

*Keywords: geometria analityczna, wektory, iloczyn skalarny*

Wektory są ważne nie tylko w matematyce, ale także w fizyce i informatyce. W matematyce są one badane w ramach gałęzi zwanej algebrą liniową.

Wektor jest zwykle definiowany jako element abstrakcyjnej struktury matematycznej zwanej przestrzenią wektorową. Typowym przykładem takiej przestrzeni jest zbiór wszystkich uporządkowanych  $n$ -krotności liczb rzeczywistych (na przykład par lub trójek), wraz z regułami ich dodawania i mnożenia przez liczbę. W matematyce w szkole średniej, wektory są często przedstawiane jako zbiór skierowanych odcinków linii, które mają tę samą wielkość i kierunek.

W fizyce wektory są używane do opisywania takich wielkości jak prędkość i przyspieszenie poruszającego się obiektu, działające na niego siły lub pola elektromagnetyczne. W informatyce wektor jest często rozumiany po prostu jako uporządkowana lista elementów (niekoniecznie liczb). Wektory zapewniają efektywny sposób organizowania i przechowywania danych, na przykład w aplikacjach uczenia maszynowego.

Istnieje jednak również dziedzina informatyki, w której wektory są używane w taki sam sposób, w jaki są definiowane w matematyce lub fizyce w szkole średniej. Obszarem tym są gry komputerowe. W rzeczywistości, opanowanie operacji wektorowych jest jednym z podstawowych elementów niezbędnych do zostania programistą gier.

W zależności od tego, czy tworzysz grę 2D czy 3D, wektory mają dwie lub trzy współrzędne i są zwykle używane do reprezentowania geometrycznych właściwości obiektów w świecie gry. Dla uproszczenia będziemy pracować tylko w dwóch wymiarach, to znaczy na płaszczyźnie przy użyciu kartezjańskiego układu współrzędnych.

*Uwaga:* Oczywiście zrozumienie wektorów jest tylko jednym z wielu podstawowych elementów. Oprócz odpowiednich narzędzi programistycznych, należy również zrozumieć macierze transformacji, takie jak translacje, obroty i tak dalej. W poniższych zadaniach skupimy się tylko na operacjach wektorowych.

## Punkty i kierunek wektora

W poniższych przykładach będziemy rozróżniać punkty (zapisane w nawiasach kwadratowych) i wektory (zapisane w nawiasach okrągłych). Jednocześnie należy pamiętać, że punkt  $A = [a_1; a_2]$  może być również interpretowany jako punkt końcowy wektora  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ , którego punktem początkowym jest początek układu współrzędnych.

Punkt ma współrzędne, ale w przeciwieństwie do wektora, nie jest zdefiniowany przez wielkość i kierunek. Punkt  $[0, 0]$  (lub wektor  $(0, 0)$ ) będzie służył jako środek świata gry.

Powszechnym zastosowaniem wektorów jest znalezienie wektora opisującego relację między dwoma obiektami. Rozważmy prosty przykład z dwoma punktami  $A = [a_1; a_2]$  i  $B = [b_1; b_2]$ . Wektor  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$  jest zwykle nazywany wektorem kierunku. Jeśli punkty  $A$  i  $B$  reprezentują postacie w grze, to wektor  $\overrightarrow{AB}$  wskazuje kierunek od jednej postaci do drugiej, a jego wielkość reprezentuje odległość, jaką musiałby pokonać znak  $A$ , aby dotrzeć do znaku  $B$ .

**Zadanie 1.** W grze 2D programista steruje postacią  $A$ , a gracz postacią  $B$ . Postacie zaczynają w różnych miejscach, reprezentowanych przez punkty  $A$  i  $B$ . Postać  $B$  porusza się po ścieżce złożonej z wektorów  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ . Wyraż wektor, który programista musi określić, aby postać  $A$  strzeliła do postaci  $B$ .

**Zadanie 2.** Niech znakami będą punkty  $A = [-5; 2]$ ,  $B = [1; -2]$  i  $C = [4; -1]$ . Wyznacz znormalizowane wektory kierunku od znaków  $A$  i  $B$  skierowane w stronę innych znaków. Narysuj odpowiedni diagram.

**Zadanie 3.** Dane są pozycje znaków  $A = [a_1; a_2]$  i  $B = [b_1; b_2]$ , przy czym znaki te stoją w różnych miejscach. Wyznaczyć:

- znormalizowany wektor kierunku  $\widehat{BA}$ ,
- gdzie znajdzie się znak  $B$  po przejściu trzech jednostek długości w kierunku znaku  $A$ ?

## Iloczyn skalarny i jego zastosowania

Wynikiem iloczynu skalarnego dwóch wektorów jest skalar, czyli liczba rzeczywista. W programowaniu gier iloczyn skalarny znormalizowanych wektorów odgrywa ważną rolę.

**Zadanie 4.** Wyznacz iloczyn skalarny znormalizowanych wektorów kierunku z rozwiązania ćwiczenia 2.

**Zadanie 5.** Obserwator znajdujący się w punkcie początkowym patrzy na obiekt  $A = [3; 1]$ . Określić kąt  $\alpha$ , o który obserwator musi się obrócić, aby znaleźć się bezpośrednio w kierunku obiektu.  $B = [1; 2]$ .

Gdyby znormalizowane wektory kierunku były jawnie podane w problemie, to ich iloczyn skalarny byłby równy  $\cos \alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Jest to powód, dla którego kierunki znaków i wektory kierunków między znakami są zwykle przechowywane w znormalizowanej formie na listach atrybutów.

Iloczyn skalarny może być również wygodnie wykorzystany do rozwiązania następującego zadania. Powiedzmy, że projektuję grę, w której gracz próbuje ukryć się przed strażnikami. W takim przypadku interesuje nas, czy strażnik widzi poszczególnych graczy.

Aby gra była bardziej realistyczna, chcemy, aby strażnik miał pole widzenia, w którym gracz jest widoczny. W przypadku ludzi poziome pole widzenia obejmowane przez oboje oczu wynosi w przybliżeniu  $180^\circ$ , ale byłoby to zbyt szerokie dla naszego strażnika. Powiedzmy więc, że pole widzenia strażnika powinno wynosić  $170^\circ$ .

**Zadanie 6.** Osłona  $G$  ma pole widzenia wynoszące  $170^\circ$ . Jakie będą wartości iloczynów punktowych między kierunkiem patrzenia strażnika  $\vec{d}$  i znormalizowane wektory kierunku do obiektów, które widzi strażnik?

Results matter!

**Zadanie 7.** Określ, czy strażnik znajdujący się w punkcie początkowym widzi gracza  $A = [3; -2]$ , biorąc pod uwagę, że kierunek patrzenia strażnika to  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  a próg dla pola widzenia strażnika jest ustawiony na 0,1.