Vectores

Keywords: geometría analítica, vectores, producto escalar

Los vectores son importantes no sólo en matemáticas, sino también en física o informática. En matemáticas, se tratan en una sección llamada álgebra lineal.

Un vector suele definirse como un elemento de una estructura matemática abstracta, el llamado espacio vectorial. Un representante típico de dicho espacio es, por ejemplo, todas las n-tuplas ordenadas de números reales (es decir, por ejemplo, pares o triples) junto con las reglas para su suma y multiplicación por algún número. En secundaria, este vector se representa típicamente como un conjunto de segmentos orientados que tienen una dirección determinada y el mismo tamaño.

En física, los vectores se utilizan para describir magnitudes como la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento, las fuerzas que actúan sobre él o el campo electromagnético. En informática, un vector suele ser una lista ordenada de elementos (no necesariamente números). Los vectores son una forma eficaz de organizar y almacenar objetos, por ejemplo en aplicaciones de aprendizaje automático.

Pero también hay un campo en la informática en el que los vectores se utilizan de la forma en que se definen en las matemáticas o la física del bachillerato. Este campo es el entorno de los juegos de ordenador. Dominar el manejo de vectores es incluso uno de los pilares básicos para ser programador de juegos.

Dependiendo de si estás creando un juego 2D o 3D, los vectores tienen dos o tres coordenadas y se utilizan generalmente para representar propiedades geométricas de los objetos en el mundo del juego. Para simplificar, sólo trabajaremos en el espacio bidimensional, es decir, en el plano, y en el sistema de coordenadas cartesianas.

Nota: Por supuesto, se necesitan muchos más componentes básicos de este tipo. Además de la herramienta de programación adecuada, también es necesario conocer las matrices de transformaciones como desplazar, rotar, etc. En las siguientes tareas queremos centrarnos sólo en las operaciones vectoriales.

Puntos y vectores de dirección

En los siguientes ejemplos, distinguiremos entre especificar puntos (entre corchetes) y vectores (entre paréntesis redondos). Al mismo tiempo, recordaremos, que el punto $A = [a_1; a_2]$ también puede verse como el punto final del vector $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2)$, cuyo origen es el origen del sistema de coordenadas.

Un punto tiene coordenadas, pero a diferencia de un vector, no está especificado por longitud y dirección. Para nosotros, el punto $[0, 0]$ o vector $(0, 0)$ será el centro del mundo del juego.

Un caso de uso común para los vectores es calcular un vector que describa la relación de un objeto con otro. Tomemos un ejemplo sencillo de puntos $A = [a_1; a_2]$ a $B = [b_1; b_2]$. El Vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ suele llamarse vector de dirección. Si los puntos A a B representan personajes en el juego, entonces el vector $\overrightarrow{AB}$ determina la dirección y su magnitud determina la distancia, que el personaje A debe recorrer para llegar al personaje B.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Tarea 1. En un juego 2D tenemos un programador controlando al personaje A y un jugador controlando al personaje B. Los personajes se sitúan al principio en lugares diferentes y se representan, para simplificar, mediante los puntos A, B. El personaje B recorre secuencialmente la ruta en la dirección de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{w}$. Expresar el vector que debe determinar el programador para hacer llegar el personaje A al personaje B.

Tarea 2. Tenemos los personajes $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$, $C = [4; -1]$. Determinar los vectores de dirección normalizados de los personajes A y B hacia los otros personajes. Haz el dibujo correspondiente.

Problema 3. Supongamos la posición del personaje $A = [a_1; a_2]$ y el personaje $B = [b_1; b_2]$ parados en lugares diferentes. Determinar:

a) el vector de dirección normalizado $\widehat{BA}$,

b) donde estará el personaje B después de caminar tres longitudes unitarias hacia el personaje A?

Producto escalar y su uso

El resultado del producto escalar de dos vectores es un escalar, es decir, un número real. El producto escalar de vectores normalizados ocupa un lugar importante en la programación de juegos.

Problema 4. Determinar los productos escalares de los vectores de dirección normalizados a partir de la solución del Problema 2.

Problema 5. El observador al principio mira el objeto $A = [3; 1]$, determinar el ángulo α con el que debe girar, para que la dirección de su mirada se dirija directamente al objeto $B = [1; 2]$.

Si en el enunciado del problema se dieran vectores direccionales normalizados, su producto escalar sería directamente igual a $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Esta es la razón por la que las direcciones de vista de los personajes y los vectores direccionales entre personajes en las listas de elementos tienden a darse de forma normalizada.

Podemos utilizar el producto escalar para resolver el siguiente problema. Supongamos que estoy creando un juego en el que el jugador intenta esconderse de unos guardias. Entonces nos interesará saber si los guardias pueden ver o no a cada uno de los jugadores.

Para mayor realismo, queremos que el guardia tenga un campo de visión en el que pueda ver al personaje. Para los seres humanos, el tamaño del campo de visión para ver con ambos ojos se da como aproximadamente $180°$. Eso sería demasiado para nuestro guardia, así que digamos que queremos que su campo de visión sea, por ejemplo $170°$.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Problema 6. El ángulo de visión del vigilante G es de $170°$, ¿qué valores tomarán los productos escalares entre su dirección de visión $\vec{d}$ y los vectores dirección normalizados a los objetos que ve?

Problema 7. Determinar si el guardia, situado en la salida, puede ver al jugador $A = [3; -2]$, si la dirección de la mirada del guardia es $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y la frontera para la limitación del campo de visión viene dada por $0{,}1$.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union