



Math4You

2023–2025

Vektory

Vektory jsou důležité v matematice i fyzice. V matematice se jimi zabývá lineární algebra, vektor je většinou definován jako orientovaná úsečka v n -dimenzionálním prostoru. Ve fyzice se pomocí vektorů popisují veličiny jako rychlost a zrychlení pohybujícího se objektu, síly na něj působící, posunutí či elektromagnetické pole. Dvě stejně velké orientované úsečky mířící stejným směrem znázorňují ten samý vektor.

Dalším oborem, kde se pojem vektor vyskytuje je informatika. Tam je vektorem často myšlen jen uspořádaný seznam položek (nemusí to být jen čísla). Vektory jsou efektivním způsobem, jak organizovat a ukládat objekty a kolekce objektů v kontejnerech pro použití například v aplikacích strojového učení.

V informatice ale existuje i oblast, kde se vektory používají tím způsobem, jakým jsou definovány v matematice či fyzice. Touto oblastí je prostředí počítačových her. Zvládnutí práce s vektory je dokonce jedním ze základních stavebních kamenů k tomu, stát se programátorem her.

Poznámka: Takových základních stavebních kamenů je třeba samozřejmě mnohem více. Kromě příslušného programovacího nástroje je třeba také znát matice transformací, jako je posunutí, otočení atd., které pak na vektory uplatňujeme. V následujících úlohách se chceme zaměřit jen na operace s vektory.

V závislosti na tom, zda vytváříte 2D nebo 3D hru mají vektory dva nebo tři rozměry a obecně se používají k reprezentaci geometrických vlastností objektů v herním světě. Pro jednoduchost budeme pracovat pouze v dvourozměrném prostoru (v rovině), tedy v Kartézské souřadné soustavě.

Body a směrové vektory

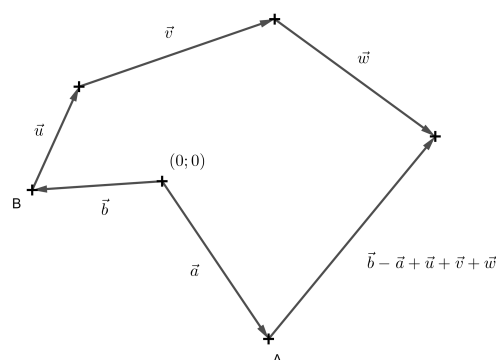
V následujících příkladech budeme rozlišovat zadání bodů a vektorů. Současně budeme ale pamatovat na to, že bod $A = [a_1; a_2]$ také můžeme brát jako koncový bod vektoru $\vec{a} = (a_1; a_2)$.

Bod má souřadnice, na rozdíl od vektoru není určen délkou a směrem. Bod $[0, 0]$ nebo vektor $(0, 0)$ pro nás bude středem herního světa.

Běžným případem použití vektorů je výpočet vektoru, který udává směr jednoho objektu vůči druhému. Vezměme si jednoduchý příklad pohybu jednoho objektu $A = [a_1; a_2]$ směrem k druhému $B = [b_1; b_2]$. Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ nazýváme směrový vektor.

Úloha 1. Ve 2D hře máme postavu A a postavu B stojící na různých místech. Postava B jde postupně ve směru vektoru $\vec{u}$, poté ve směru vektoru $\vec{v}$ a poté ve směru vektoru $\vec{w}$. Vyjádřete vektor, který musí ujít postava A , jestli má jít přímo k nové pozici postavy B .

Řešení. Je jasné, že postava B celkem ušla $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Postavy A a B ale na začátku stály na různých místech, zbývá nám tedy určit vektor s počátečním bodem v B , tedy směrový vektor $\overrightarrow{AB}$. Víme že bod A můžeme brát jako koncový bod vektoru $\vec{a}$ a bod B jako koncový bod vektoru $\vec{b}$. Pak tedy vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (protože bod a vektor mají stejné souřadnice, používá se často i zápis $\overrightarrow{AB} = B - A$). Celkově tedy postava A musí ujít $\vec{b} - \vec{a} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Obrázek 1: Obrázek k řešení příkladu 1

U každé postavy v herním světě se používá i vektor ve smyslu seznamu položek. Jednou z položek je třeba jméno postavy, její úloha, poloha. Další vlastností každé postavy v herním světě je směr, kterým je tato postava natočena. K určení směru natočení se používá takzvaný normalizovaný směrový vektor, tedy směrový vektor délky 1.

Normalizované směrové vektory se používají i k uchovávání informace, jakým směrem se vyskytují ostatní postavy nebo objekty.

Poznámka: Důvod, proč jsou v herním světě používány normalizované verze směrových vektorů vysvětlíme později.

Úloha 2. Mějme postavy $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$, $C = [4; -1]$. Určete normalizované směrové vektory postav A a B směrem k ostatním postavám. Nakreslete odpovídající obrázek.

Řešení. Pro směrový vektor $\overrightarrow{AB}$ platí $\overrightarrow{AB} = (1 - (-5); -2 - 2) = (6; -4)$. Pokud ho chceme normalizovat, stačí ho vydělit jeho délkou $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{52}$. Normalizovaný vektor k vektoru $\overrightarrow{AB}$ značíme $\widehat{AB}$ a platí

$$\widehat{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(6; -4)}{\sqrt{52}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

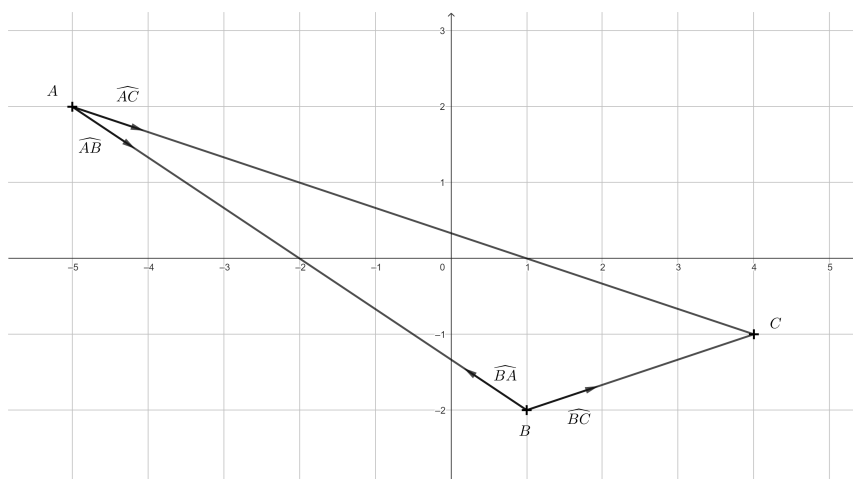
Obdobně

$$\widehat{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(9; -3)}{\sqrt{90}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(3; 1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{(-6; 4)}{\sqrt{52}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

Vektor $\widehat{BA}$ jsme nemuseli počítat, protože má stejnou velikost jako vektor $\widehat{AB}$ a opačný směr. Souřadnice takových vektorů se liší jen v opačném znaménku.



Obrázek 2: Obrázek k řešení příkladu 2

Úloha 3. Mějme polohu postavy $A = [a_1; a_2]$ a postavy $B = [b_1; b_2]$ stojících na různých místech. Určete a) normalizovaný směrový vektor $\widehat{BA}$, b) kde se bude postava B nacházet poté, co ujde tři jednotkové délky směrem k postavě A ?

Řešení. a) To co jsme počítali v předchozím příkladu s konkrétními souřadnicemi nyní zapíšeme obecně. Tedy

$$\widehat{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{\overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

b) Z předchozího máme spočítaný směrový vektor jednotkové délky. Nyní stačí vynásobit ho třemi a přičíst k poloze postavy B . Dostáváme

$$B + 3\widehat{BA} = [b_1; b_2] + 3 \frac{\overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

Skalární součin a jeho použití

Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je skalár, tedy reálné číslo. V programování her má důležité místo skalární součin normalizovaných vektorů.

Úloha 4. Určete skalární součiny normalizovaných směrových vektorů z řešení úlohy 2.

Řešení.

$$\widehat{AB} \cdot \widehat{AC} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = \frac{11}{\sqrt{130}} \doteq 0,96$$

$$\widehat{BA} \cdot \widehat{BC} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = -\frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = -\frac{7}{\sqrt{130}} \doteq -0,054$$

Skalární součin dvou normalizovaných vektorů je velmi užitečný, protože určuje, do jaké míry dva vektory směřují stejným nebo podobným směrem! Skalární součin může totiž v tomto případě nabývat hodnot v rozmezí -1 až 1, přičemž 1 znamená, že oba vektory směřují přesně stejným směrem, a -1, že směřují opačným směrem, zatímco hodnota blízká 0 znamená, že svírají úhel 90°. Důvodem rozsahu hodnot [-1, 1] je to, že se pohybujeme v rozmezí funkčních hodnot funkce kosinus. Pro skalární součin dvou vektorů p a q , totiž také platí vztah

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \alpha,$$

kde α je úhel který vektory p a q svírají.

Úloha 5. Pozorovatel v počátku se dívá na objekt $A = [3; 1]$, určete úhel α o jaký se musí otočit, aby směr jeho pohledu mířil přímo na objekt $B = [1; 2]$.

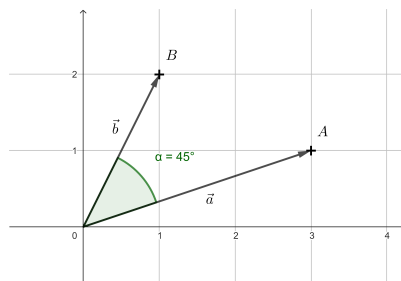
Řešení. Body A a B budeme opět brát jako koncové body vektorů $a = (3; 1)$ a $b = (1; 2)$. Ze vztahu, který platí pro skalární součin dvou vektorů vyjádříme $\cos \alpha$, tedy

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Po dosazení získáváme

$$\cos \alpha = \frac{(3; 1) \cdot (1; 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{25}{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Buď si pamatujeme, že je to $\cos 45^\circ$, který je roven $\frac{1}{\sqrt{2}}$, nebo hodnotu úhlu α vypočítáme jako $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pozorovatel se tedy musí otočit o úhel 45° .



Obrázek 3: Obrázek k řešení příkladu 5

Pokud by v zadání úlohy byly dané normalizované směrové vektory, jejich skalární součin by byl roven přímo $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

To je důvod proč bývají směry pohledů u postav a směrové vektory mezi postavami v seznamech položek uváděny v normalizovaném tvaru.

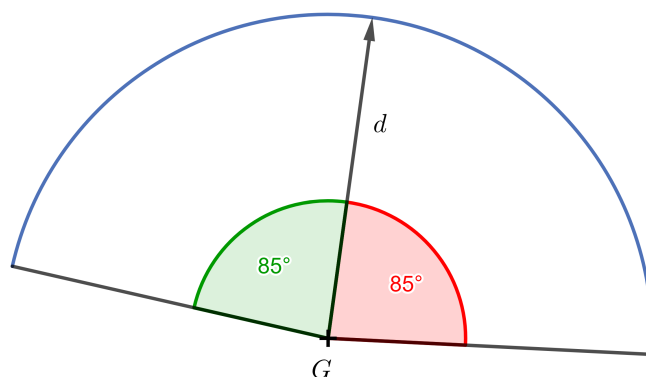
Jak už bylo zmíněno, v programování her jsou třeba také transformační matice. Pro potřebnou rotaci z předchozího příkladu by pak nebylo třeba dopočítávat úhel α , protože v příslušné transformační matici vystupují právě kosiny a siny tohoto úhlu.

Řekněme, že vytváříme hru, ve které se hráč snaží schovat před nějakými strážemi. Bude nás tedy zajímat, zda strážný vidí či nevidí jednotlivé hráče.

Chceme, aby měl strážný zorné pole, jak jsme zvyklí ve většině her. U člověka se udává velikost zorného úhlu pro vidění oběma očima přibližně 180° . To by pro strážného bylo až příliš, takže řekněme že chceme aby jeho zorný úhel byl 170° .

Úloha 6. Zorný úhel strážného G je 170° , jakých hodnot budou nabývat skalární součiny mezi jeho směrem pohledu $\vec{d}$ a normalizovanými směrovými vektory k objektům, které strážný vidí?

Řešení. Od směru pohledu strážce k hranicím zorného pole (směrem doprava i doleva) máme 85° . Stačí tedy vypočítat $\cos 85^\circ \doteq 0,087$. Skalární součiny mezi směrem pohledu strážného a normalizovanými směrovými vektory k objektům, které vidí budou nabývat hodnot mezi 0,087 a 1.



Obrázek 4: Obrázek k řešení příkladu 6

Do seznamu položek příslušnému strážci tedy ke směru pohledu přidáme rozmezí, které bude určovat jeho zorné pole. Pomocí něj pak můžeme kontrolovat, zda strážný hráče vidí či nevidí. Pro jednoduchost předchozí výsledek zaokrouhlíme na jedno desetinné místo a zorné pole strážného tedy omezíme hodnotou 0, 1.

Úloha 7. Určete zda strážný, umístěný v počátku, vidí hráče $A = [3; -2]$, jestliže směr pohledu strážného je $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a hranice pro omezení zorného pole je dána hodnotou 0, 1.

Řešení. Směr pohledu strážného je už normalizovaný vektor. Stačí tedy normalizovat směrový vektor od strážného k hráči A . Díky tomu že strážný je v počátku, stačí normalizovat vektor $\vec{a} = (3; -2)$. Platí

$$\hat{a} = \frac{(3; -2)}{3^2 + (-2)^2} = \frac{(3; -2)}{15} = \left(\frac{3}{15}; \frac{-2}{15}\right).$$

Poté už můžeme vypočítat příslušný skalární součin těchto normalizovaných vektorů, tedy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}; \frac{-2}{\sqrt{15}}\right) = \frac{3}{\sqrt{75}} - \frac{4}{\sqrt{75}} = -\frac{1}{\sqrt{75}} \doteq -0,12.$$

Výsledek není v rozmezí od 0, 1 do 1, strážný tedy hráče A nevidí. Z výsledku je navíc jasné že mezi vektory je větší než pravý úhel.

Na procvičení: V čem se situace z předchozího příkladu změní, pokud strážce není v počátku?

Literatura