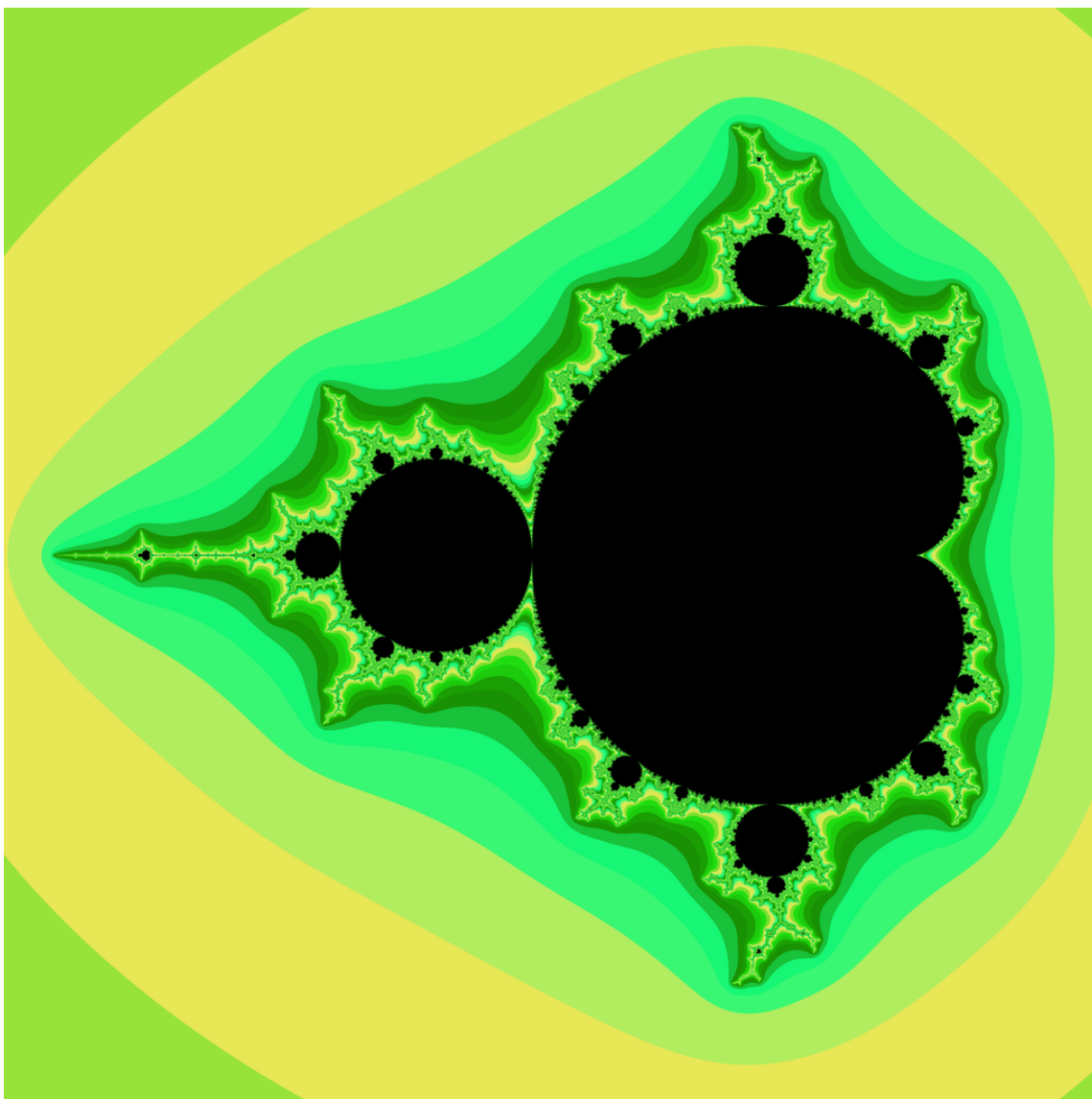


Zbiór Mandelbrota

Keywords: liczby zespolone, płaszczyzna Gaussa, ciągi, zbieżność, wartość bezwzględna

Zbiór Mandelbrota jest jednym z najbardziej znanych i najpiękniejszych fraktali, fascynującym matematyków, naukowców i artystów na całym świecie. Choć na pierwszy rzut oka wygląda jak skomplikowany wzór, opiera się on na prostej regule matematycznej polegającej na powtarzaniu potęgowania i dodawania. To, co czyni go tak interesującym, to jego nieskończona złożoność i piękne wzory ukryte w każdym szczególe.



Rysunek 1: The Mandelbrot set; the color of points in its vicinity corresponds to the index of the first term in the sequence at which it is determined that the sequence goes to infinity.

Zastosowanie zbioru Mandelbrota wykracza daleko poza matematykę. Wykorzystuje się go w grafice komputerowej do tworzenia złożonych i realistycznych obiektów podczas modelowania struktur naturalnych, takich jak linie brzegowe, góry lub formacje chmur. Można go nawet wykorzystać w ekonomii i fizyce do symulacji systemów chaotycznych.

Zbiór Mandelbrota jest dowodem na to, że nawet proste procedury matematyczne mogą prowadzić do niezwykle złożonych i pięknych wyników, które mają zastosowanie w świecie rzeczywistym.

Tworzenie zbioru

Rozważmy stosunkowo prostą formułę rekurencyjną

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

gdzie wartość początkowa wynosi $z_0 = 0$, a c reprezentuje dowolną liczbę zespoloną. Francusko-amerykański matematyk Benoit Mandelbrot (1924–2010) był zainteresowany tym, kiedy sekwencja liczb utworzona w ten sposób jest ograniczona, tj. dla jakich wartości c w płaszczyźnie zespolonej sekwencja ta zbiega się lub oscyluje. Jeśli w pewnym momencie ciąg rozbiega się, chciał wiedzieć, jak szybko. Można udowodnić, że jeśli wartość bezwzględna dowolnego wyrazu ciągu z_n przekracza 2, to ciąg ten nie jest ograniczony.¹⁰²⁹

Zbiór Mandelbrota jest zatem zbiorem punktów c na płaszczyźnie zespolonej, dla których ciąg utworzony przez wzór rekurencyjny zbiega się lub oscyluje. Dzięki powyższemu faktowi wiemy, że dla każdego wyrazu z tego ciągu jego wartość bezwzględna $|z|$ musi być mniejsza lub równa dwóm.

Weryfikacja, czy dana wartość c należy do zbioru Mandelbrota, odbywa się poprzez obliczenie poszczególnych iteracji i obserwację wartości bezwzględnych tych iteracji. Do obliczenia iteracji używamy wzoru rekurencyjnego

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0.$$

Na przykład dla $c = -i$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 - i = 0^2 - i = -i, & |z_1| &= 1, \\ z_2 &= z_1^2 - i = (-i)^2 - i = -1 - i, & |z_2| &= \sqrt{2}, \\ z_3 &= z_2^2 - i = (-1 - i)^2 - i = i, & |z_3| &= 1, \\ z_4 &= z_3^2 - i = (i)^2 - i = -1 - i, & |z_4| &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Z obliczeń jasno wynika, że wyniki $-i$ i $-1 - i$ będą się powtarzać w nieskończoność. W związku z tym warunek $|z| \leq 2$ będzie zawsze spełniony, a zatem liczba $-i$ należy do zbioru Mandelbrota.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy liczby zespolone 1 ; i ; -1 ; $1 + i$ należą do zbioru Mandelbrota.

Rozwiązanie. Dla uproszczenia rozważymy tylko kilka pierwszych kroków iteracji. Obraz liczby c na płaszczyźnie Gaussa należy do zbioru Mandelbrota, jeśli dla wszystkich wyników iteracyjnego obliczenia wartość bezwzględna wyniku jest mniejsza lub równa 2.

Proces iteracyjny dla $c = 1$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2, \quad |z_2| = 2,$$

$$z_3 = z_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5, \quad |z_3| = 5.$$

Obliczenia wyraźnie pokazują, że warunek $|z| \leq 2$ nie został spełniony w trzecim kroku iteracji, co oznacza, że liczba 1 nie należy do zbioru Mandelbrota.

Proces iteracyjny dla $c = i$.

$$z_1 = z_0^2 + i = 0^2 + i = i, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + i = i^2 + i = -1 + i, \quad |z_2| = \sqrt{2},$$

$$z_3 = z_2^2 + i = (-1 + i)^2 + i = -i, \quad |z_3| = 1,$$

$$z_4 = z_3^2 + i = (-i)^2 + i = -1 + i, \quad |z_4| = \sqrt{2}.$$

Obliczenia pokazują, że wartości $-1 + i$ i i będą się powtarzać w nieskończoność. Warunek $|z| \leq 2$ będzie zawsze spełniony, dlatego liczba i należy do zbioru Mandelbrota.

Proces iteracyjny dla $c = -1$.

$$z_1 = z_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0, \quad |z_2| = 0,$$

$$z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_3| = 1.$$

Wartości będą się powtarzać, a warunek $|z| \leq 2$ będzie zawsze spełniony, dlatego liczba -1 należy do zbioru Mandelbrota.

Proces iteracyjny dla $c = 1 + i$

$$z_1 = z_0^2 + 1 + i = 0^2 + 1 + i = 1 + i, \quad |z_1| = \sqrt{2},$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i + i^2 + 1 + i = 1 + 3i, \quad |z_2| = \sqrt{10}.$$

Z obliczeń jasno wynika, że warunek $|z| \leq 2$ nie został spełniony w drugim kroku iteracji i liczba $1 + i$ nie należy do zbioru Mandelbrota.

Ćwiczenie 2. Udowodnij, że jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $|z_k| > 2$, to ciąg z_n jest rozbieżny.

Rozwiązanie. Stosując wzór rekurencyjny, otrzymujemy ułamek

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|}. \quad (1)$$

Wykorzystanie nierówności trójkąta

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

where $a = z^2 + c$ and $b = -c$, we get

$$|z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |-c| = |z^2 + c| + |c|$$

Results matter!

and hence $|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c|$.

Podstawiając do (1) i modyfikując, otrzymujemy

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}.$$

Ponadto wiemy, że istnieje takie n , że zachodzi warunek $|z_n| > |c|$. Dla $|c| \leq 2$ wynika to z założenia. Dla $c > 2$, wówczas dla $n = 2$ zachodzi następująca zależność:

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c|.$$

Więc można zapisać

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1 > 1.$$

A zatem

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1,$$

lub $|z_{n+1}| > |z_n|$ i nasza sekwencja się rozbiega.

Literatura

- Čáпка Hartinger, David. *Zbiór Mandelbrota – lekcja 3 [online]* <https://www.itnetwork.cz/algoritmy/graficke/algoritmy/zykresleni-fraktalu-mandelbrotovy-mnoziny> [dostęp: 22.09.2023]
- Wikipedia. *Zbiór Mandelbrota [online]*. Dostępne na stronie https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set [dostęp: 22.09.2023].
- PantheraLeo1359531. *Zbiór Mandelbrota – rysunek [online]*. Dostępne na stronie <https://commons.wikimedia.org/w> [dostęp: 22.09.2023]