



Math4You

2023–2025

Instructions for translators

1. Open this file on GitHub server. If you see `https://um.mendelu.cz/...` in URL, click View on GitHub to open this file on github.com.
2. If you see this file on GitHub server, you can edit the content of the file. Open the file in an editor. You can use simple editor (press e on GitHub). However, an advanced VS Code editor (press . on GitHub) is better, since it provides preview how the Markdown code renders. Alternatively press pencil for simple editor or press triangle next to the pencil to get access to VS Code described as `github.dev`.
3. Fix the keywords in the preamble.
4. Depending on which language version you want to use as a source for your translation, delete either English or Czech version below.
5. Translate to your language. Keep Markdown marking and math notation. If you use a tool to get first version of the translation, make sure that the markup is preserved.
6. In VS Code you can open the preview in another window by pressing `Ctrl+V` and `K`. Keep the preview open as you work, or close using a mouse.
7. Instead of saving, you have to commit and push the changes to the repository. Fill the Message under Source control (describe your changes, such as “Polish translation started”) and then press Commit&Push.
8. Make sure that your changes appear in the commit history. In rare cases (if you work with simultaneously with someone else) you have to download /Pull/ and merge his and yours changes. Usually Sync (Pull & Push) should work.
9. When you finish the translation, change `is_finished: False` in header to `is_finished: True`.

Instrukce pro překladatele

1. Otevřete tento soubor na serveru GitHub. Pokud máte soubor otevřen na `https://um.mendelu.cz/...`, otevřete jej na serveru github.com.
2. Pokud tento soubor vidíte na serveru GitHub, můžete obsah souboru upravit. Otevřete soubor v editoru. Můžete použít jednoduchý editor (stiskněte e na GitHubu). Lepší je však pokročilý editor VS Code (stikněte . na GitHubu), protože poskytuje náhled, jak se kód Markdown interpretuje. Případně stiskněte tužku pro jednoduchý editor nebo stiskněte trojúhelníček vedle tužky, abyste získali přístup k editoru VS Code popsany jako `github.dev`.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.

3. Opravte klíčová slova v preambuli.
4. V závislosti na tom, kterou jazykovou verzi chcete použít jako zdrojový kód pro svůj překladu, odstraňte níže uvedenou anglickou nebo českou verzi.
5. Přeložte do svého jazyka. Ponechte značení Markdown a matematický zápis. Pokud použijete nástroj typu DeepL pro získání první verze překladu, ujistěte se, že zápis matematických výrazů byl zachován.
6. Ve VS Code můžete náhled otevřít v jiném okně stisknutím `Ctrl+V`. a `K`. Během práce nechte náhled otevřený nebo jej zavřete pomocí myši.
7. Místo uložení musíte změny zaregistrovat a odeslat do úložiště. Vyplňte zprávu v poli Zpráva (popište své změny, např. "Zahájen překlad do polštiny") a poté stiskněte tlačítko Commit&Push.
8. Ujistěte se, že se vaše změny objeví v historii revizí. Ve výjimečných případech (pokud pracujete současně s někým jiným) musíte stáhnout /Pull/ a sloučit jeho a vaše změny. Obvykle by synchronizace (Pull & Push) měla fungovat.
9. Po dokončení překladu změňte `is_finished: False` v záhlaví na `is_finished: True`.

Czech source

Počáteční šíření epidemie

Nejznámějším případem epidemie z poslední doby je pandemie virové choroby COVID-19, která je způsobena koronavirem SARS-CoV-2. Tato epidemie vypukla v prosinci 2019 ve městě Wu-chan v provincii Chu-pej v centrální Číně.

Začátek epidemie COVID-19 v Evropě se datuje na leden 2020. První potvrzené případy byly hlášeny ve Francii dne 24. ledna 2020. Jednalo se o tři pacienty, kteří se nedávno vrátili z Číny, kde byla epidemie již v plném proudu.

Do České republiky se pak nemoc rozšířila před 1. březnem 2020, kdy byly potvrzeny první tři případy. K 18. březnu 2020 bylo u nás potvrzeno již 464 případů.

Šíření nemoci mívá na začátku epidemie exponenciální charakter. Až později se obvykle toto šíření zpomalí a dále už má jiný průběh (lineární, logistický apod.).

Typický průběh epidemie

Na základě získaných dat zkusíme namodelovat počet nakažených osob v závislosti na dnech od začátku epidemie. V tabulce jsou data popisující počet nakažených v závislosti na dnech od začátku epidemie.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)
1	3
2	3
3	5
4	6
5	9
6	20
7	27

Den (n)	Počet nakažených (a_n)
8	33
9	39
10	64
11	95
12	117
13	142
14	190
15	299
16	384

Poznámka. Jedná se o reálná data z České republiky od 1. března 2020.

Úloha 1. Vypočítejte poměr počtu nakažených osob v jednom dni vzhledem k předchozímu dni.

Řešení. Označíme-li q_n poměr nakažených v n -tém dnu ku počtu nakažených v $n-1$ -ním dnu, dostaneme pro výpočet vztah

$$q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Můžeme tak vypočítat všechny údaje a doplnit tabulku.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)	Poměr počtu nakažených
1	3	—
2	3	1,000
3	5	1,667
4	6	1,200
5	9	1,500
6	20	2,222
7	27	1,350
8	33	1,222
9	39	1,182
10	64	1,641
11	95	1,484
12	117	1,232
13	142	1,214
14	190	1,338
15	299	1,574
16	384	1,284

Vypočtenou hodnotu poměru počtu nakažených v jednom dni vzhledem k předchozímu dni můžeme interpretovat jako rychlost šíření nemoci. Pro přesně exponenciální růst nebo pokles by tento poměr vycházel konstantní. My pracujeme pouze s “naměřenými” daty, takže nám hodnota poměru vychází pouze přibližně. Pojďme se proto na tento poměr podívat blíže.

Úloha 2. Vypočítejte aritmetický a geometrický průměr poměru počtu nakažených. Který z nich je v tomto případě vhodnější?

Řešení. Aritmetický průměr $\bar{q}$ je dán vzorcem

$$\bar{q} = \frac{q_2 + \dots + q_{16}}{15} = 1,40731.$$

Podobně pro geometrický průměr G platí

$$G = \sqrt[15]{q_2 \cdot \dots \cdot q_{16}} = 1,38191.$$

Lepší je v tomto případě použít geometrický průměr.

Aritmetický průměr může být ovlivněn extrémními hodnotami (pro nás například hodnota q_6), což může zkreslit interpretaci průměrného růstu nebo poklesu. Geometrický průměr naopak tento vliv zmírňuje.

Navíc v exponenciálním případě růstu (pokud se omezíme na základní typ tvaru $k \cdot a^x$) se násobí konstantním faktorem (tj. podíl dvou naměřených hodnot po pevně zvoleném intervalu je konstantní). Geometrický průměr přímo reprezentuje tuto násobnou povahu změn. Pokud například máme dvě po sobě jdoucí měření s poměry

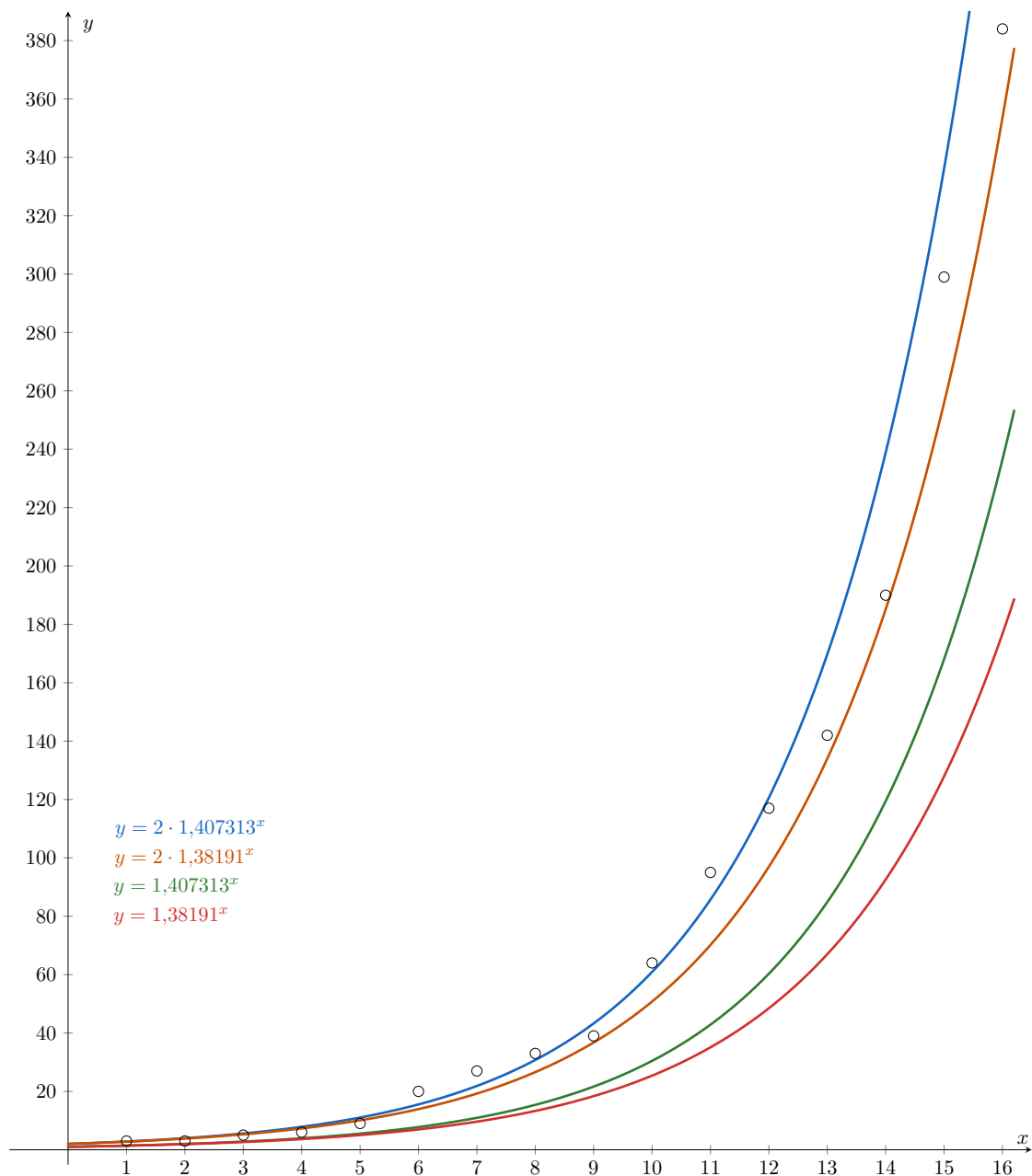
$$q_1 = 2, \quad q_2 = 0,5,$$

pak aritmetický průměr $\bar{q} = 1,25$ by naznačoval stabilní růst, zatímco geometrický průměr $G = 1$ správně reflektuje nulový čistý růst.

Úloha 3. Navrhněte funkci, která by aproximovala počet nakažených v jednotlivých dnech. Vytvořte graf v Geogebře (případně jiném programu).

Řešení. Metodou pokus-omyl se pro tvorbu exponenciální funkce, která vhodně reprezentuje naše data, nabízí například využití vypočítaných průměrů. Pro zápis funkce budeme využívat obvyklé značení, které je použité i v Geogebře a na obrázku níže. V grafu x značí čas ve dnech a y počet nakažených.

S aritmetickým průměrem získáme funkci $y = 1,40731^x$, s geometrickým průměrem $y = 1,38191^x$. Tyto funkce jsou od vyznačených bodů celkem daleko, proto je mírně upravíme: $y = 2 \cdot 1,40731^x$, $y = 2 \cdot 1,38191^x$. Grafy navržených funkcí jsou zobrazeny v obrázku. Samozřejmě můžete získat ještě přesnější exponenciální funkce.

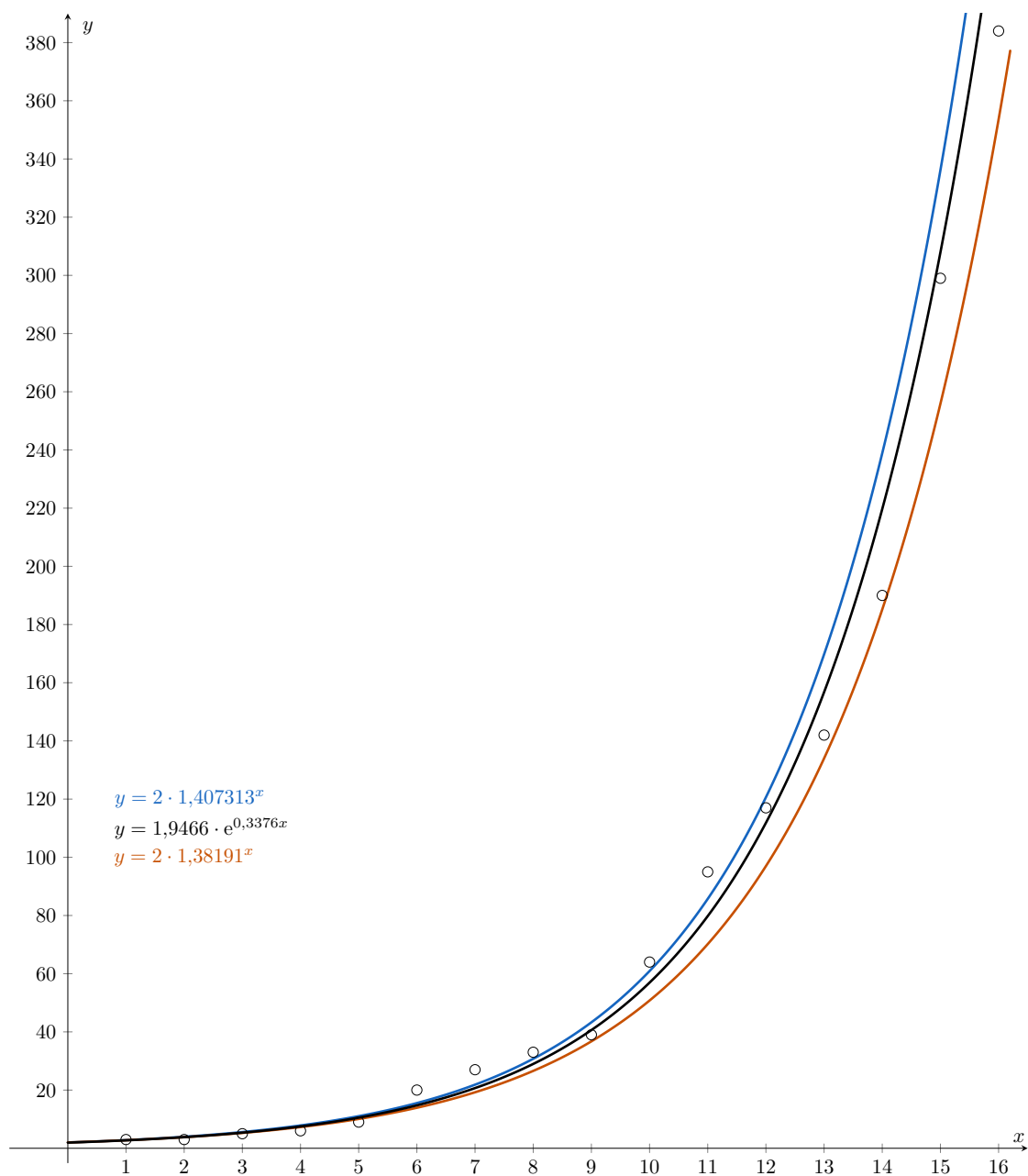


Obr. 1: Navržené exponenciální funkce metodou pokus omyl

Úloha 4. Po využití regresní analýzy dat lze získat vhodnější funkci popisující chování počtu nakažených, která je tvaru $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$. Porovnejte v Geogebře (nebo v jiném vhodném softwaru) vaši funkci s touto funkcí. Vypočítejte hodnoty navržených funkcí pro 14. až 16. den, výsledek zaokrouhlete na celé číslo. Porovnejte je s hodnotami v tabulce.

Poznámka. Exponenciální funkci získanou regresní analýzou lze vytvořit v tabulkovém procesoru nebo Geogebře. V Geogebře je nutný příkaz, v němž zadáme body získané z tabulky: `RegreseExponencialni({(1,3), (2,3), (3,5), ..., (16,384)})`.

Řešení. Všechny tři funkce jsou v obrázku níže. Pouhým pohledem můžeme vidět, že všechny funkce jsou si na začátku podobné, ale pro další hodnoty funkce $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$ vypadá jako nejvhodnější pro popis zdaných dat.



Obr. 2: Srovnání navržených funkcí s funkcí dle regresní analýzy

Toto pozorování můžeme i kvantifikovat pomocí údajů z tabulky.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)	Počet dle funkce $y = 2 \cdot 1,40731^x$	Počet dle funkce $y = 2 \cdot 1,38191^x$	Počet dle funkce $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$
14	190	239	185	220
15	299	336	256	308
16	384	473	354	432

Jako ukazatel přesnosti s jakou naše funkce reprezentují daná data můžeme uvážit, jak moc se liší jednotlivé hodnoty od sebe. Postupně tak dostaneme

$$|239 - 190| + |336 - 299| + |473 - 384| = 175$$

$$|185 - 190| + |256 - 299| + |354 - 384| = 92$$

$$|220 - 190| + |308 - 299| + |432 - 384| = 87.$$

Obvykle se ale pro posouzení přesnosti používají druhé mocniny (čtverce) uvedených rozdílů. A to proto, že malé rozdíly (menší než 1) se umocněním zmenšují a velké rozdíly se ještě zvětšují.

V tomto případě dostáváme

$$(239 - 190)^2 + (336 - 299)^2 + (473 - 384)^2 = 11691$$

$$(185 - 190)^2 + (256 - 299)^2 + (354 - 384)^2 = 4174$$

$$(220 - 190)^2 + (308 - 299)^2 + (432 - 384)^2 = 3285.$$

Tedy i v tomto případě se jako nejlepší ukázala třetí křivka. Toto není žádná náhoda, jelikož křivka vytvořená pomocí regrese je křivka, která má tuto chybu nejmenší.

Úloha 5. Bude se epidemie šířit neustále podle navržené funkce? Co může mít vliv na její další chování?

Řešení. Pro zachování exponenciálního průběhu epidemie by se nesměly měnit podmínky šíření nemoci. V praxi se lidé začnou chránit ochrannými prostředky, minimalizovat kontakt s ostatními nebo očkovat, čímž se nárůst počtu nakažených sníží. Epidemie se dostane do svého vrcholu a počty nakažených se začnou snižovat. Pro trvalý exponenciální růst by také muselo existovat neomezené množství jedinců, kteří se mohou danou nemocí nakazit.

Literatura

- European Centre for Disease Prevention and Control *Novel Coronavirus: three cases reported in France*. Dostupné z https://www.flickr.com/photos/ecdc_eu/50321985653/in/dateposted/ [cit. 08.08.2024]
- Ministerstvo zdravotnictví ČR. *Onemocnění aktuálně - COVID 19*. Dostupné <https://onemocneni-aktualne.mzcr.cz/api/v2/covid-19> [cit. 30.8.2023]

English source

Initial Spread of the Epidemic

The most well-known recent epidemic is the COVID-19 pandemic, a viral disease caused by the SARS-CoV-2 coronavirus, which broke out in December 2019 in the city of Wuhan in Hubei province in central China.

The beginning of the COVID-19 epidemic in Europe dates back to January 2020. The first confirmed cases were reported in France on January 24, 2020. They were three patients who had recently returned from China, where the epidemic was already in full swing.

The disease then spread to the Czech Republic before March 1, 2020, when the first three cases were confirmed. As of March 18, 2020, 464 cases had already been confirmed in our country.

The early phase of an epidemic is typically characterized by exponential growth. As time progresses, the spread tends to slow down and follow a different trajectory (such as linear, logistic, etc.).

Typical Scenario of an Epidemic

Based on the collected data, we will try to model the number of infected individuals as a function of the number of days since the start of the epidemic. The table contains the data describing the number of infected individuals with respect to the number of days since the beginning of the pandemic.

Day (n)	Number of infected individuals (a_n)
1	3
2	3
3	5
4	6
5	9
6	20
7	27
8	33
9	39
10	64
11	95
12	117
13	142
14	190
15	299
16	384

Note. These are real data from the Czech Republic starting on March 1, 2020.

Exercise 1. Calculate the ratio of the number of infected individuals on a given day to the number of the previous day.

Solution. If we denote by q_n the ratio of infected individuals on the n th day to the number of infected individuals on the $n - 1$ th day, we get the following formula

$$q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

We can now calculate all the values and complete the table.

Day (n)	Number of infected individuals (a_n)	Ratio of infected individuals
1	3	—
2	3	1.000
3	5	1.667
4	6	1.200
5	9	1.500
6	20	2.222
7	27	1.350
8	33	1.222
9	39	1.182
10	64	1.641
11	95	1.484
12	117	1.232
13	142	1.214
14	190	1.338
15	299	1.574
16	384	1.284

The calculated ratio of the number of infected people on a given day to the previous day can be interpreted as the rate of disease spread. For a strictly exponential growth or decline, this ratio would be constant. However, since we are working with observed data only, the value of the ratio is only approximate. Let's take a closer look at this ratio.

Exercise 2. Calculate the arithmetic and geometric mean of the ratio of the number of infected. Which one is more appropriate in this case?

Solution. The arithmetic mean $\bar{q}$ is given by the formula

$$\bar{q} = \frac{q_2 + \cdots + q_{16}}{15} = 1.40731.$$

Similarly, for the geometric mean G we get

$$G = \sqrt[15]{q_2 \cdots q_{16}} = 1.38191.$$

It is better to use the geometric mean in this case.

The arithmetic mean can be affected by extreme values (for us, for example, the value of q_6), which can distort the interpretation of average growth or decline. The geometric mean, on the other hand, reduces the impact of such extremes.

Moreover, in the case of exponential growth (if we restrict ourselves to the basic form $k \cdot a^x$) it is multiplied by a constant factor (i.e. the ratio of two measured values taken at fixed intervals is constant). The geometric mean directly represents this multiplying nature of change. For example, let's assume we have two consecutive measurements with ratios

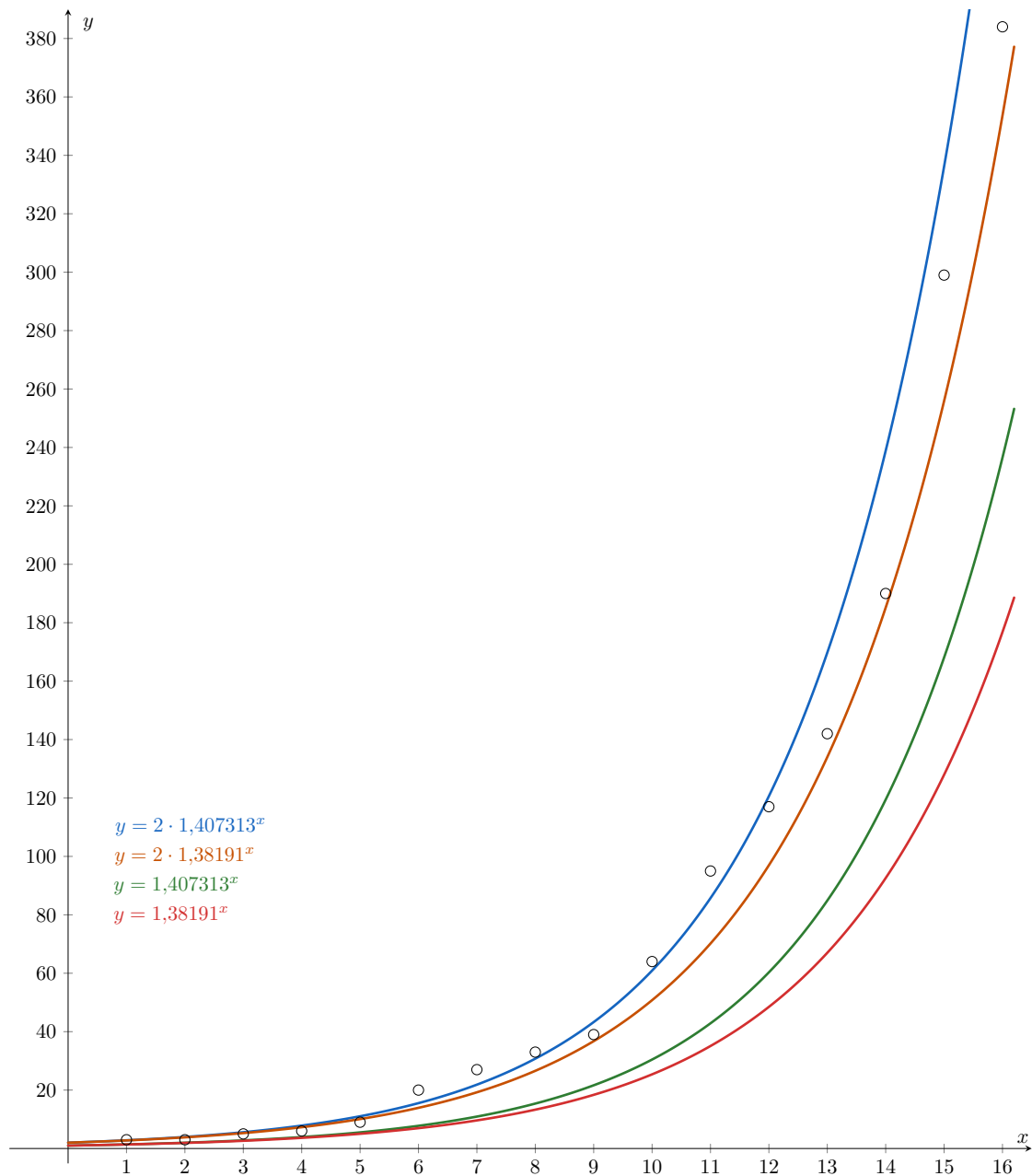
$$q_1 = 2, \quad q_2 = 0.5,$$

then the arithmetic mean $\bar{q} = 1.25$ would indicate stable growth, while the geometric mean $G = 1$ correctly reflects zero net growth.

Exercise 3. Design a function that approximates the number of infected individuals on each day. Create a graph in GeoGebra (or another program).

Solution. Using trial and error, we can create an exponential function that suitably represents our data, for example by making use of the calculated averages. We will use the standard notation that is also used in GeoGebra and in the figure below. In the graph, x represents the time in days and y represents the number of infected individuals.

By using the arithmetic mean we get the function $y = 1.40731^x$, the geometric mean yields function $y = 1.38191^x$. These functions are quite far from the marked points, so we will slightly modify them: $y = 2 \cdot 1.40731^x$, $y = 2 \cdot 1.38191^x$. The graphs of the proposed functions are shown in the figure. Of course, it is possible to get even more accurate exponential functions.

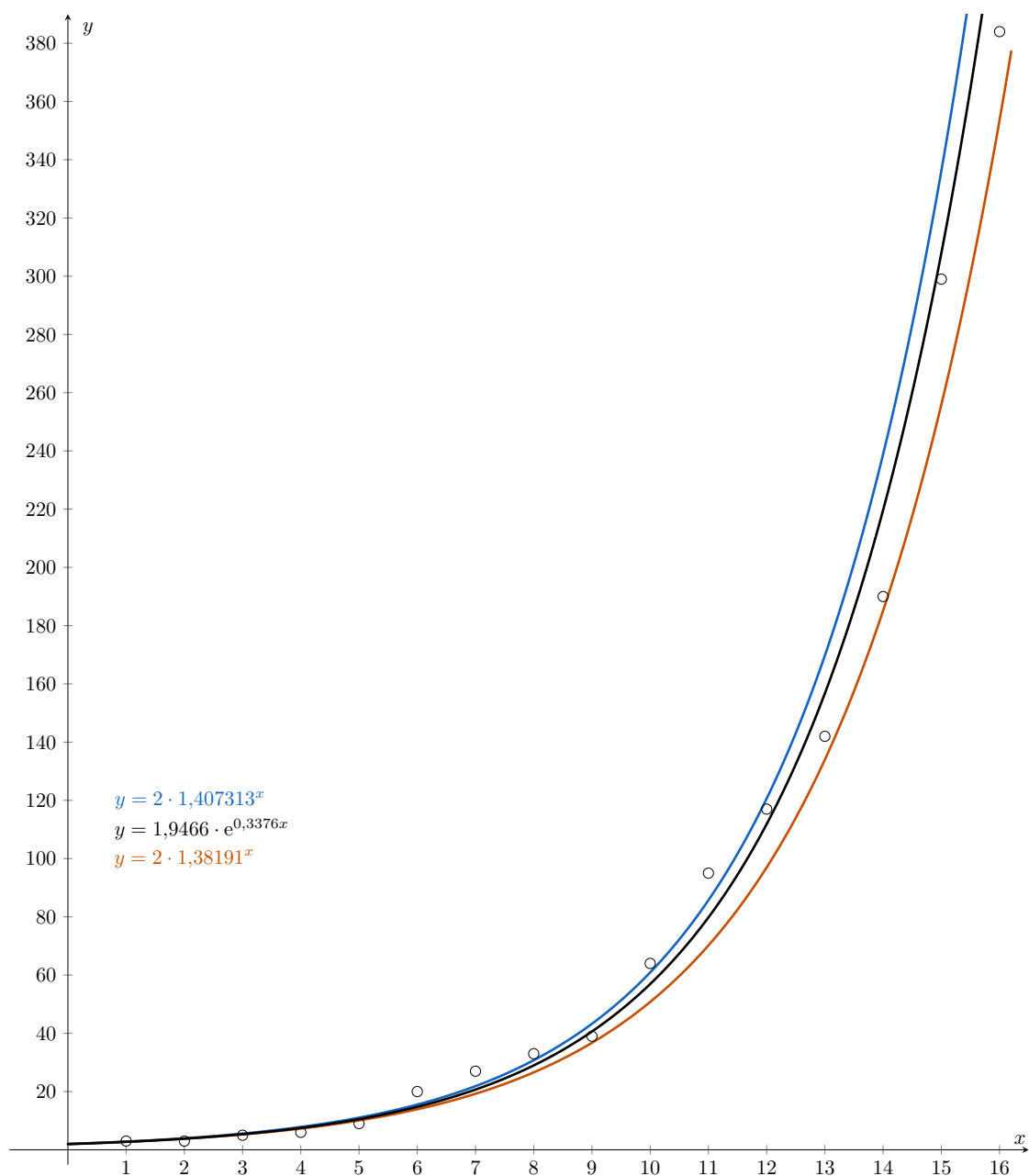


Obr. 3: Proposed exponential functions by the method of trial and error

Exercise 4. By applying regression analysis to the data, a more suitable function describing the behavior of the number of infected individuals can be obtained: $y = 1.9466 \cdot e^{0.3376x}$. Compare your proposed function with this function in GeoGebra (or another suitable software). Calculate the values of all functions for days 14 to 16, rounding the result to the nearest whole number. Compare these values with those in the table.

Note. The exponential function obtained by regression analysis can be created using either a spreadsheet or Geogebra. In Geogebra, the points obtained from the table must be entered using the following command: `FitExp({(1,3), (2,3), (3,5), ..., (16,384)})`.

Solution. All three functions are shown in the figure below. At first glance, we can see that all the functions are similar at the beginning, but for larger values of x , the function $y = 1.9466 \cdot e^{0.3376x}$ seems to be the best fit for the given data.



Obz. 4: Comparison of the proposed functions with the function obtained by regression analysis

We can also quantify this observation using the data from the table.

Day (n)	Number of infected individuals (a_n)	Modelled values according to $y = 2 \cdot 1.40731^x$	Modelled values according to $y = 2 \cdot 1.38191^x$	Modelled values according to $y = 1.9466 \cdot e^{0.3376x}$
14	190	239	185	220

Day (n)	Number of infected individuals (a_n)	Modelled values according to $y = 2 \cdot 1.40731^x$	Modelled values according to $y = 2 \cdot 1.38191^x$	Modelled values according to $y = 1.9466 \cdot e^{0.3376x}$
15	299	336	256	308
16	384	473	354	432

We can use the extent to which the individual values differ from each other as an indicator of the accuracy with which our functions represent the given data. This gives us the following results:

$$\begin{aligned}
 |239 - 190| + |336 - 299| + |473 - 384| &= 175 \\
 |185 - 190| + |256 - 299| + |354 - 384| &= 92 \\
 |220 - 190| + |308 - 299| + |432 - 384| &= 87.
 \end{aligned}$$

However, usually the squares of the differences are used to assess accuracy. This is because squaring reduces the impact of small differences (less than 1) and increases the effect of large ones even more.

This results in:

$$\begin{aligned}
 (239 - 190)^2 + (336 - 299)^2 + (473 - 384)^2 &= 11,691 \\
 (185 - 190)^2 + (256 - 299)^2 + (354 - 384)^2 &= 4,174 \\
 (220 - 190)^2 + (308 - 299)^2 + (432 - 384)^2 &= 3,285.
 \end{aligned}$$

In this case, the third curve also turned out to be the best. This is no coincidence, as the curve created using regression minimizes this type of error.

Exercise 5. Will the epidemic continue to spread according to the designed function? What might influence its future behaviour?

Solution. In order for the epidemic to continue to grow exponentially, the conditions for the spread of the disease must remain unchanged. In practice, people will start to protect themselves with protective equipment, minimize contact with others or get vaccinated. This will reduce the rate at which the number of infected individuals increases. The epidemic will reach its peak and the number of infected individuals will start to decrease. For sustained exponential growth, there would also have to be an unlimited number of individuals who can become infected with the disease.

Literature

- European Centre for Disease Prevention and Control *Novel Coronavirus: three cases reported in France*. Dostupné z https://www.flickr.com/photos/ecdc_eu/50321985653/in/dateposted/ [cit. 08.08.2024]
- Ministerstvo zdravotnictví ČR. *Onemocnění aktuálně - COVID 19*. Available from <https://onemocneni-aktualne.mzcr.cz/api/v2/covid-19> [cit. 30.8.2023]