



Math4You

2023–2025

Počáteční šíření epidemie

Nejznámějším případem epidemie z poslední doby je pandemie virové choroby COVID-19, která je způsobena koronavirem SARS-CoV-2, a která vypukla v prosinci 2019 ve městě Wu-chan v provincii Chu-pej v centrální Číně.

Začátek epidemie COVID-19 v Evropě se datuje na leden 2020. První potvrzené případy byly hlášeny ve Francii dne 24. ledna 2020. Jednalo se o tři pacienty, kteří se nedávno vrátili z Číny, kde byla epidemie již v plném proudu.

Do České republiky se pak nemoc rozšířila před 1. březnem 2020, kdy byly potvrzeny první tři případy. K 18. březnu 2020 bylo u nás potvrzeno již 464 případů.

Počátek epidemie se typicky modeluje exponenciálně. Až později obvykle šíření zpomalí a má jiný průběh (lineární, logistický atd.).

Typický průběh epidemie

Na základě získaných dat zkusíme namodelovat počet nakažených osob v závislosti na dnech od začátku epidemie. V tabulce jsou data popisující počet nakažených v závislosti na dnech od začátku epidemie.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)
1	3
2	3
3	5
4	6
5	9
6	20
7	27
8	33
9	39
10	64
11	95
12	117
13	142

Den (n)	Počet nakažených (a_n)
14	190
15	299
16	384

Poznámka. Jedná se o reálná data z České republiky od 1. března 2020.

Úloha 1. Vypočítejte poměr počtu nakažených osob v jednom dni vzhledem k předchozímu dni.

Řešení. Označíme-li q_n poměr nakažených v n -tém dnu ku počtu nakažených v $n-1$ -ním dnu, dostaneme pro výpočet vztah

$$q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Můžeme tak vypočítat všechny údaje a doplnit tabulku.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)	Poměr počtu nakažených
1	3	—
2	3	1,000
3	5	1,667
4	6	1,200
5	9	1,500
6	20	2,222
7	27	1,350
8	33	1,222
9	39	1,182
10	64	1,641
11	95	1,484
12	117	1,232
13	142	1,214
14	190	1,338
15	299	1,574
16	384	1,284

Danou hodnotu poměru můžeme interpretovat jako rychlost šíření nemoci. Pro exponenciální růst nebo pokles je typické, že násobek mezi po sobě následujícími hodnotami je přibližně konstantní.

Úloha 2. Vypočítejte aritmetický a geometrický průměr poměru počtu nakažených. Který z nich je v tomto případě vhodnější?

Řešení. Aritmetický průměr $\bar{q}$ je dán vzorcem

$$\bar{q} = \frac{q_2 + \dots + q_{16}}{15} = 1,40731.$$

Podobně pro geometrický průměr G platí

$$G = \sqrt[15]{q_2 \cdot \dots \cdot q_{16}} = 1,38191.$$

Lepší je v tomto případě použít geometrický průměr.

Aritmetický průměr může být ovlivněn extrémními hodnotami (pro nás například hodnota q_6), což může zkreslit interpretaci průměrného růstu nebo poklesu. Geometrický průměr naopak tento vliv zmírňuje.

Navíc v exponenciálním případě růstu se násobí konstantním faktorem. Geometrický průměr přímo reprezentuje tuto násobnou povahu změn. Pokud například máme dvě po sobě jdoucí měření s poměry

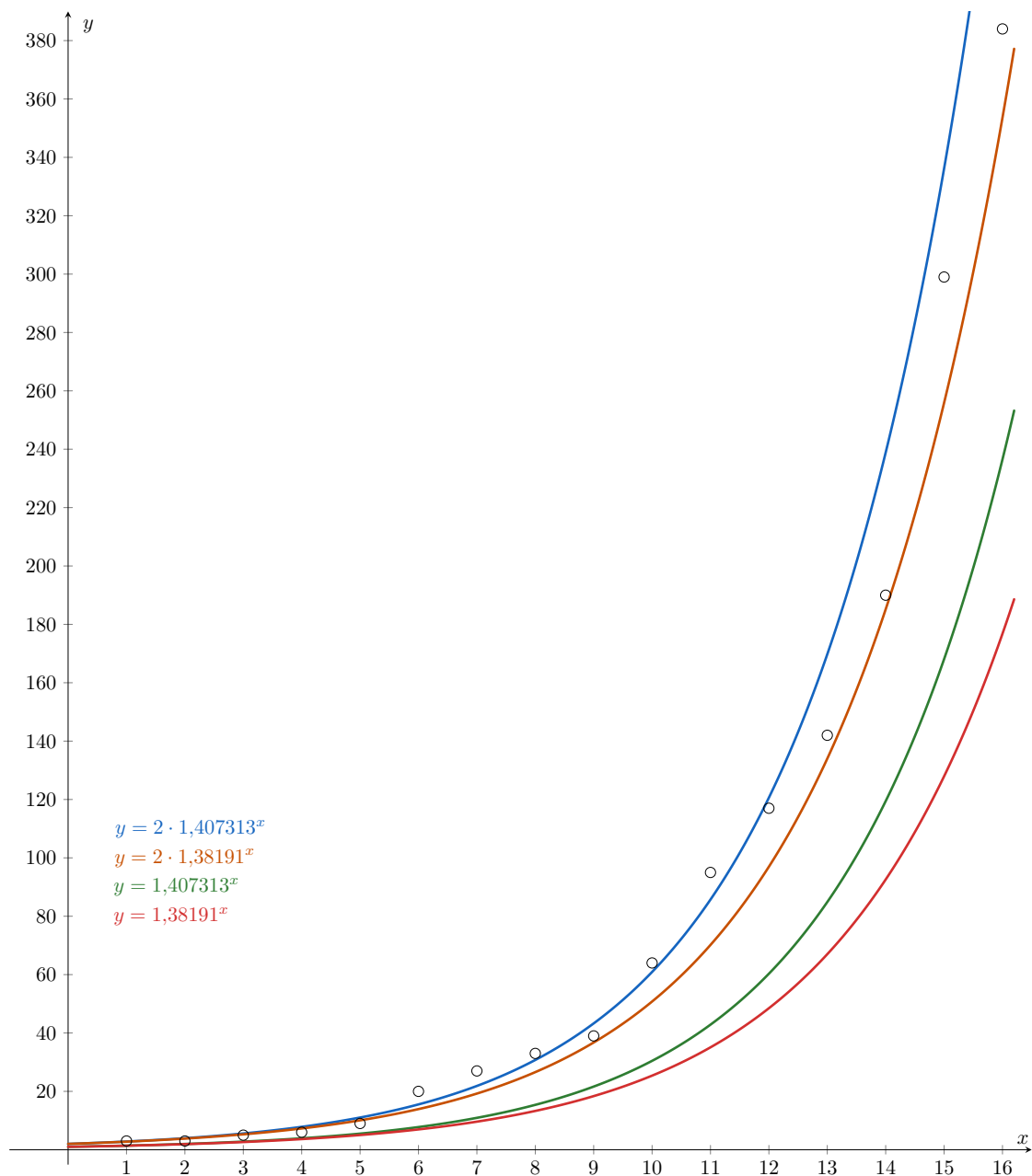
$$q_1 = 2, \quad q_2 = 0,5,$$

pak aritmetický průměr $\bar{q} = 1,25$ by naznačoval stabilní růst, zatímco geometrický průměr $G = 1$ správně reflektuje nulový čistý růst.

Úloha 3. Navrhněte funkci, která by aproximovala počet nakažených v jednotlivých dnech. Vytvořte graf v Geogebře (případně jiném programu).

Řešení. Metodou pokus-omyl se pro tvorbu exponenciální funkce, která vhodně reprezentuje naše data, nabízí například využití vypočítaných průměrů. Pro zápis funkce budeme využívat obvyklé značení, které je použité i v Geogebře a na obrázku níže. V grafu x značí čas ve dnech a y počet nakažených.

S aritmetickým průměrem získáme funkci $y = 1,40731^x$, s geometrickým průměrem $y = 1,38191^x$. Tyto funkce jsou od vyznačených bodů celkem daleko, proto je mírně upravíme: $y = 2 \cdot 1,40731^x$, $y = 2 \cdot 1,38191^x$. Grafy navržených funkcí jsou zobrazeny v obrázku. Samozřejmě můžete získat ještě přesnější exponenciální funkce.

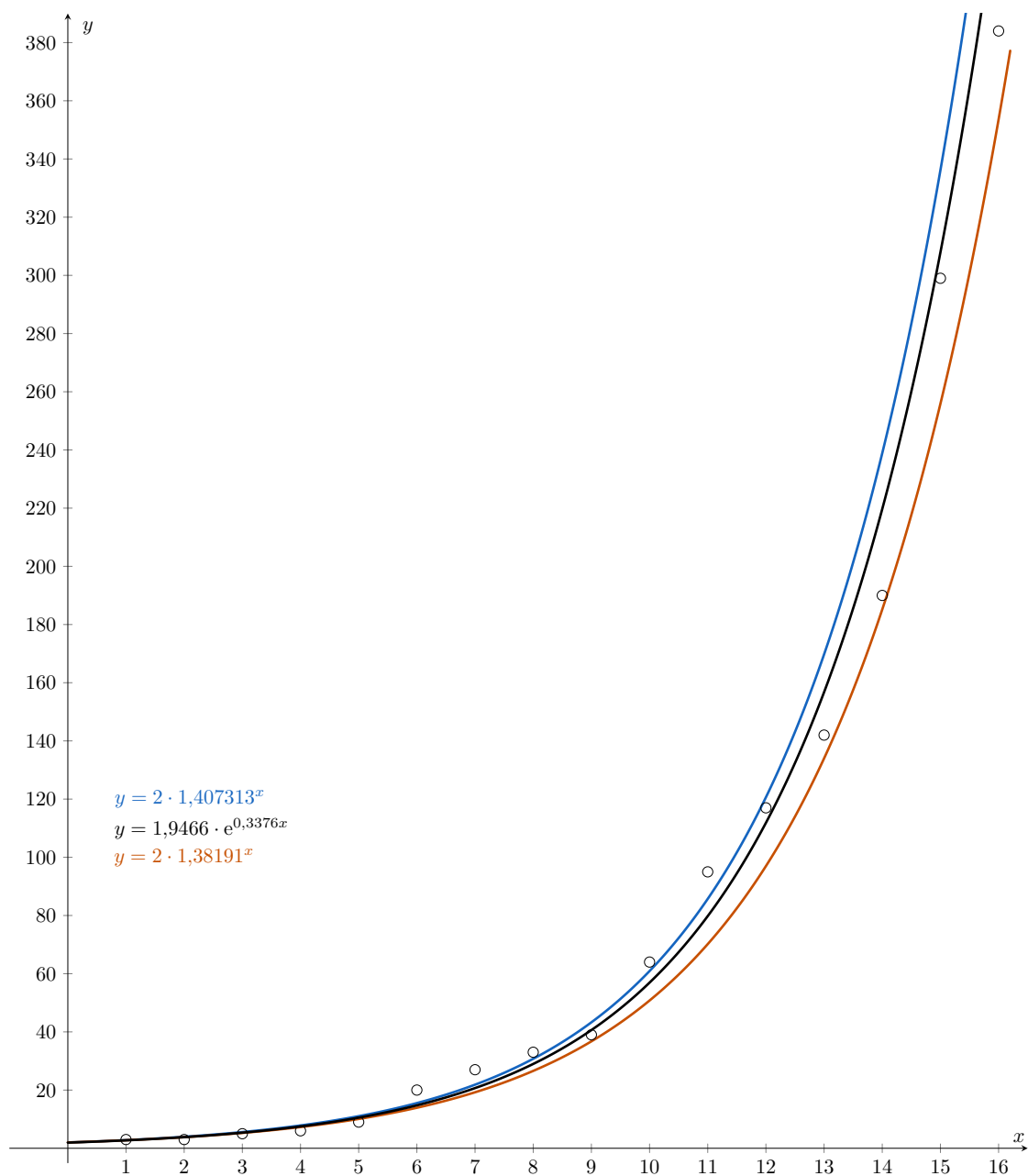


Obrázek 1: Navržené exponenciální funkce metodou pokus omyl

Úloha 4. Po využití regresní analýzy dat lze získat vhodnější funkci popisující chování počtu nakažených, která je tvaru $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$. Porovnejte v Geogebře (nebo v jiném vhodném softwaru) vaši funkci s touto funkcí. Vypočítejte hodnoty navržených funkcí pro 14. až 16. den, výsledek zaokrouhlete na celé číslo. Porovnejte je s hodnotami v tabulce.

Poznámka. Exponenciální funkci získanou regresní analýzou lze vytvořit v tabulkovém procesoru nebo Geogebře. V Geogebře je nutný příkaz, v němž zadáme body získané z tabulky: `RegreseExponencialni({(1,3), (2,3), (3,5), ..., (16,384)})`.

Řešení. Všechny tři funkce jsou v obrázku níže. Pouhým pohledem můžeme vidět, že všechny funkce jsou si na začátku podobné, ale pro další hodnoty funkce $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$ vypadá jako nejvhodnější pro popis zdaných dat.



Obrázek 2: Srovnání navržených funkcí s funkcí dle regrese analýzy

Toto pozorování můžeme i kvantifikovat pomocí údajů z tabulky.

Den (n)	Počet nakažených (a_n)	Počet dle funkce $y = 2 \cdot 1,40731^x$	Počet dle funkce $y = 2 \cdot 1,38191^x$	Počet dle funkce $y = 1,9466 \cdot e^{0,3376x}$
14	190	239	185	220
15	299	336	256	308
16	384	473	354	432

Jako ukazatel přesnosti s jakou naše funkce reprezentují daná data můžeme uvážit, jak moc se liší jednotlivé hodnoty od sebe. Postupně tak dostaneme

$$\begin{aligned}
|239 - 190| + |336 - 299| + |473 - 384| &= 175 \\
|185 - 190| + |256 - 299| + |354 - 384| &= 92 \\
|220 - 190| + |308 - 299| + |432 - 384| &= 87.
\end{aligned}$$

Obvykle se ale pro posouzení přesnosti používají druhé mocniny (čtverce) uvedených rozdílů. A to proto, že malé rozdíly (menší než 1) se umocněním zmenšují a velké rozdíly se ještě zvětšují.

V tomto případě dostáváme

$$\begin{aligned}
(239 - 190)^2 + (336 - 299)^2 + (473 - 384)^2 &= 11691 \\
(185 - 190)^2 + (256 - 299)^2 + (354 - 384)^2 &= 4174 \\
(220 - 190)^2 + (308 - 299)^2 + (432 - 384)^2 &= 3285.
\end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě se jako nejlepší ukázala třetí křivka. Toto není žádná náhoda, jelikož křivka vytvořená pomocí regrese je křivka, která má tuto chybu nejmenší.

Úloha 5. Bude se epidemie šířit neustále podle navržené funkce? Co může mít vliv na její další chování?

Řešení. Pro zachování exponenciálního průběhu epidemie by se nesměly měnit podmínky šíření nemoci. V praxi se lidé začnou chránit ochrannými prostředky, minimalizovat kontakt s ostatními nebo očkovat, čímž se nárůst počtu nakažených sníží. Epidemie se dostane do svého vrcholu a počty nakažených se začnou snižovat. Pro trvalý exponenciální růst by také muselo existovat neomezené množství jedinců, kteří se mohou danou nemocí nakazit.

Literatura

- European Centre for Disease Prevention and Control *Novel Coronavirus: three cases reported in France*. Dostupné z https://www.flickr.com/photos/ecdc_eu/50321985653/in/dateposted/ [cit. 08.08.2024]
- Ministerstvo zdravotnictví ČR. *Onemocnění aktuálně - COVID 19*. Dostupné <https://onemocneni-aktualne.mzcr.cz/api/v2/covid-19> [cit. 30.8.2023]