



Math4You

2023–2025

Optimalization

Linear programming

Linear programming is a mathematical method used to find the best solution to a particular problem. It is a technique that aims to maximize or minimize a linear function under certain constraints, which are also expressed as linear equations or inequalities.

This area began to attract the attention of mathematicians only after the First World War. The first of these was Leonid Kantorovich, who, however, had to give up this work due to the government repression at that time (and subsequently fears for his life). It was not a good idea to optimize production processes in the Soviet Union, which had a centrally controlled economy at the time (for example, in one factory he managed to increase production efficiency to 94%, only to be told that all factories had to increase their efficiency in the same way).

The real turning point in the development of linear programming was the publication of the so-called simplex algorithm for solving these problems in 1947. Its author is the American mathematician George Dantzig, who began working in this field during the Second World War in an attempt to optimize certain processes in the US military. They called it *programming methods using desktop calculators*. In his first technical lecture on the subject, he talked about *linear structure programming*, which was subsequently shortened to just *linear programming*. The word *programming* is a relic of military terminology referring to the planning or scheduling of training, logistics, or team deployment.

We will illustrate the principles with the following simple examples.

Optimizing production in a roasting plant

Exercise 1. Berenice and Peter opened a new café with a roastery, where, among other things, they started to produce two blends of coffee: summer and exotic. The summer blend is made of 40 % sweet Ethiopian coffee beans and 60 % juicy coffee beans from Peru. The exotic blend is made from the same coffee. There are 90 kg of Ethiopian coffee and 70 kg of Peruvian coffee. A kilo of the summer blend sells for 650 CZK and a kilo of the exotic blend sells for 800 CZK. How much of which blend should Berenice and Peter mix from the available coffee beans to maximize their profit?

Solution First, we need to mathematize this whole problem. Let's start, therefore, by denoting the amount of mixed summer mixture as x and the amount of exotic mixture as y . Regardless of how many individual mixtures will be produced, we can quantify the profit z from their sale by using the expression

$$z = 650x + 800y.$$

Je jasné, že nelze vyrábět záporné množství, tj. určitě musí platit

$$x \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad y \geq 0. \quad (1)$$

Nyní musíme zohlednit to, že nemáme neomezené množství kávových zrn. Celkovou spotřebou etiopské kávy můžeme vzhledem k poměrům míchání vyjádřit jako

$$0,4x + 0,75y$$

a v případě peruánské kávy to je

$$0,6x + 0,25y.$$

Dohromady s dostupným množstvím získáváme dvojici podmínek

$$0,4x + 0,75y \leq 90 \quad \text{a zároveň} \quad 0,6x + 0,25y \leq 70. \quad (2)$$

Množina bodů, které vyhovují podmínkám (1) a (2) je vyšrafována na obrázku níže, přičemž zelenou barvou je zakreslena hraniční přímka $0,4x + 0,75y = 90$ a modrou barvou přímka $0,6x + 0,25y = 70$.

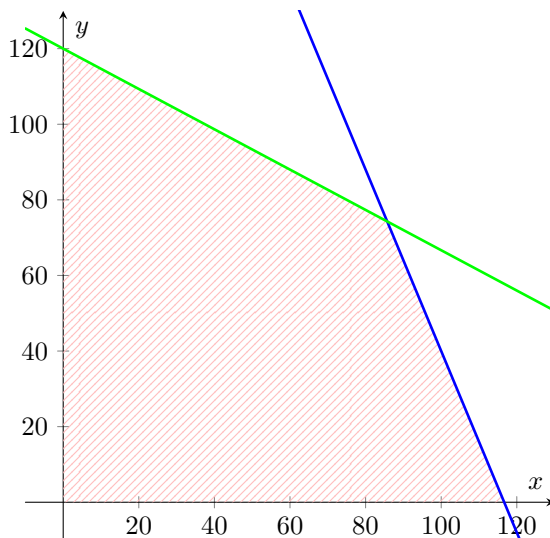


Figure 1: Oblast vyhovující daným podmínkám

Ve vyšrafované oblasti jsou tak všechny body, jejichž souřadnice x a y odpovídají možným řešením naší úlohy. Jak ale najdeme bod s maximálním ziskem, tj. bod ve kterém je hodnota výrazu $z = 650x + 800y$ maximální?

Můžeme si uvědomit, že tento výraz je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Uvažujeme-li z této roviny pouze tu část, která je nad vyšrafovanou oblastí, dostáváme v prostoru čtyřúhelník.

Místo toho, abychom kreslili prostorový obrázek, dokreslíme si do obrázku ještě tzv. *vrstevnice*. Jsou to přímky s rovnicemi

$$650x + 800y = c$$

pro vhodná c . Význam těchto vrstevnic je podobný jako význam vrstevnic na mapě. Pouze místo bodů o stejné nadmořské výšce, spojují naše vrstevnice body, ve kterých dosáhneme stejného zisku.

Tímto postupem dostaneme obrázek s vrstevnicemi zakreslenými hnědou barvou.

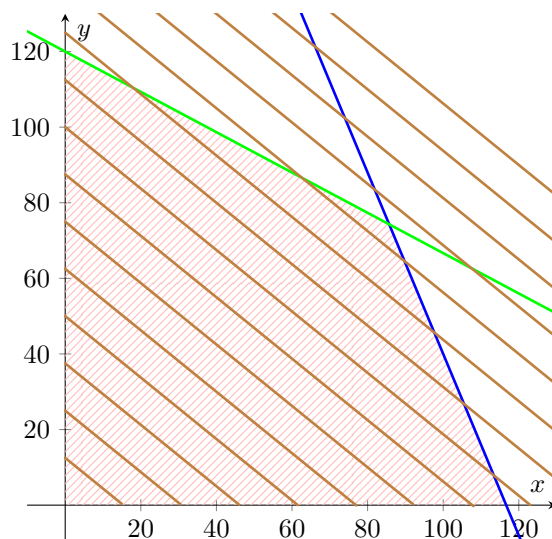


Figure 2: Oblast vyhovující daným podmínkám

Jak ale určíme vhodnou hodnotu c ? Tu naštěstí nemusíme nijak složitě počítat, ale můžeme ji zjistit z našeho obrázku. Pro $c = 0$ dostaneme přímku procházející počátkem, a jelikož se všechny vrstevnice liší pouze hodnotou c , musí být všechny hnědé přímky rovnoběžné. Odtud pak už jen vidíme, že maximum (vrstevnice se s rostoucí hodnotou c posouvají severovýchodním směrem) se realizuje v bodě, kde se protne modrá a zelená přímka.

Souřadnice tohoto bodu tedy můžeme najít jako řešení soustavy

$$0,4x + 0,75y = 90$$

$$0,6x + 0,25y = 70.$$

Je jím bod o souřadnicích $\left[\frac{600}{7}, \frac{520}{7}\right]$. Dosazením těchto hodnot do výrazu $z = 650x + 800y$ dostaneme hodnotu maximálního zisku přibližně 115 143 Kč. Toho bude dosaženo, pokud Berenika s Petrem vyrobí $600/7$ kg, tj. přibližně 85,71 kg letní směsi a $520/7$ kg, tj. přibližně 74,29 kg exotické směsi.

Poznámka. To, že řešení vyšlo v průsečíku dvou hraničních přímek, však není náhoda. U těchto úloh, kdy všechny funkce jsou pouze lineární, platí, že řešení je vždy v některém z vrcholů mnohoúhelníku (pokud existuje) vymezujícího všechny přípustné body. Toho lze využít i v případě úloh s mnohem větším počtem neznámých.

Stačí najít všechny vrcholy a porovnat funkční hodnoty. Avšak toto použití tzv. hrubé síly má svá úskalí: může být výpočetně velmi náročné a vyžaduje mít zaručenu existenci řešení. Nicméně tato myšlenka stojí za prvním velmi efektivním (a dodnes používaným) algoritmem pro řešení těchto úloh. Při jeho použití jsou vrcholy procházeny systematicky (tj. ne nutně všechny).

Nejlepší parkoviště

Úloha 2. Místní developer se rozhodl zakoupit továrnu na výrobu videokazet a magnetofonových pásků. Továrna dnes již nemá žádné využití, a tak bude zbourána, aby na jejím místě vyrostlo P+R parkoviště pro osobní automobily a zároveň odstavné parkoviště pro nákladní automobily. Developer však nyní řeší problém, jakou nastavit kapacitu pro jednotlivé druhy vozů. Celkový dostupný prostor bude 480 m^2 . Parkovací místo pro osobní automobil zabere 12 m^2 , zatímco pro nákladní auto to je 30 m^2 .

Stavební úřad však zároveň požaduje, aby kapacita pro osobní automobily byla alespoň dvakrát větší než pro nákladní vozy, ale zároveň tam musí být nejméně 6 parkovacích míst pro nákladní automobily.

Stanovte optimální počet parkovacích míst pro osobní i nákladní automobily, který bude splňovat všechny uvedené podmínky a zároveň maximalizuje zisk z plného parkoviště, pokud za každé parkovací místo pro osobní automobily bude platba 100 Kč a pro nákladní vozy 400 Kč.

Řešení. Můžeme postupovat podobně jako v předchozím příkladě, avšak je potřeba mít na mysli, že tentokrát musí být počty parkovacích míst celočíselné. Označíme-li jako x počty parkovacích míst pro osobní automobily a jako y počty parkovacích míst pro nákladní vozy, pak naším cílem je maximalizovat zisk z daný vztahem

$$z = 100x + 400y.$$

Navíc z uvedených podmínek plynou následující omezení.

Podmínka	Zdůvodnění
$y \geq 6$	požadavek na minimální počet pro nákladní vozy
$2y \leq x$	požadavek na poměr parkovacích míst
$12x + 30y \leq 480$	dostupná kapacita pozemku
$x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	počty musí být přirozená čísla nebo případně nula

Množina splňující všechny uvedené podmínky je vykreslena na obrázku níže. Vyznačeny jsou přímky $y = 6$ (zelenou barvou), $2y = x$ (hnědou barvou), $12x + 30y = 480$ (modrou barvou) a vrstevnice $100x + 400y = c$ pro různé hodnoty c (červenou barvou). Čím větší je c , tím více jsou vrstevnice "vpravo nahoře".

Růžovou barvou je vyšrafován mnohoúhelník, který vyhovuje všem uvedeným podmínkám kromě poslední. Černé body jsou pak všechny body, které splňují i tuto podmínku, tj. mají navíc jenom jako souřadnice přirozená čísla (nula nepřichází v dané oblasti v úvahu).

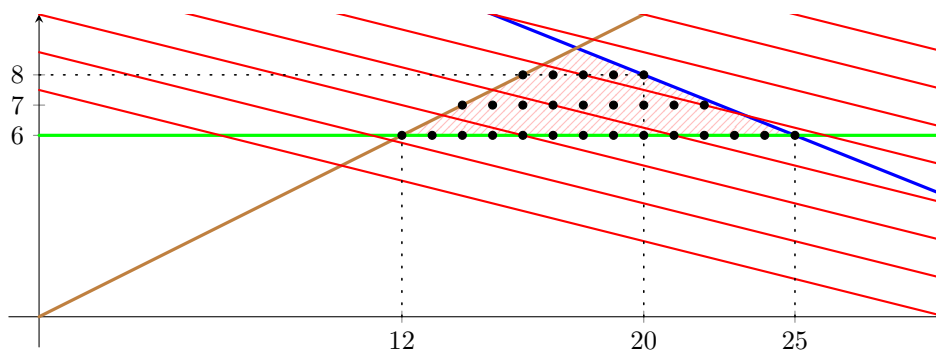


Figure 3: Oblast vyhovující daným podmínkám

Z obrázku je patrné, že maximum se bude realizovat v bodě, který je nejvíce vpravo nahoře. Jaké jsou ale jeho souřadnice?

Vzhledem k tomu, že se jedná o průsečík modré a hnědé přímky, můžeme jeho souřadnice určit řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}2y &= x \\12x + 30y &= 480\end{aligned}$$

Jejím řešením je dvojice $[160/9, 80/9]$, která ovšem není celočíselná.

Podíváme-li se na obrázek pozorně a zvážíme-li směr vrstevnic, můžeme odhadnout, že hledané maximum se bude realizovat v bodě $y = 8$. Současně vidíme, že tento bod leží na modré přímce, takže po dosazení $y = 8$ do rovnice této přímky, dostaneme $x = 20$.

Maximálního zisku 5200 Kč proto bude dosaženo v případě, kdy bude vybudováno 20 parkovacích míst pro osobní automobily a 8 parkovacích míst pro nákladní vozy.

Jako kontrolu můžeme samozřejmě určit všechny celočíselné body splňující daná omezení a ověřit, že v žádném z nich není hodnota výrazu $100x + 400y$ větší nebo rovna 5200.