

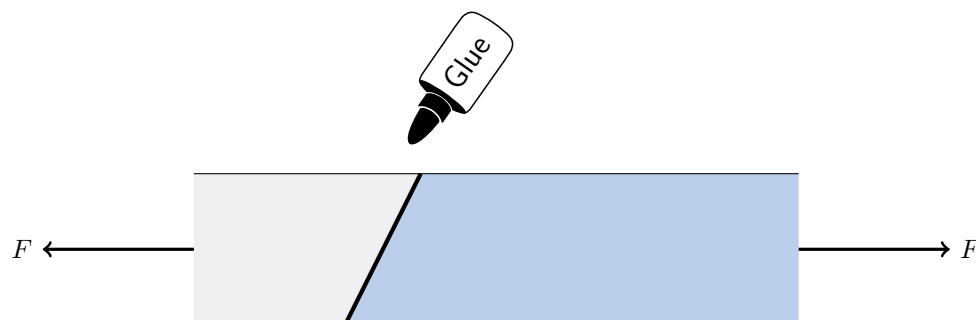
Math4You

2023–2025

Lepené Spoje

V tomto textu si ukážeme, jak je možné praktické využití goniometrických funkcí a vztahů mezi délkami stran pravouhlého trojúhelníka.

Budeme se zabývat problematikou lepených spojů. Ukážeme si metody, jak rozložit silové namáhání spoje na více složek a na větší plochu a jak určit namáhání takového spoje. Vypočteme, jak se změní namáhání spoje při osovém namáhání tyče nebo nosníku, který není slepen čely, ale spoj je veden šikmo, jak je vidět na obrázku.



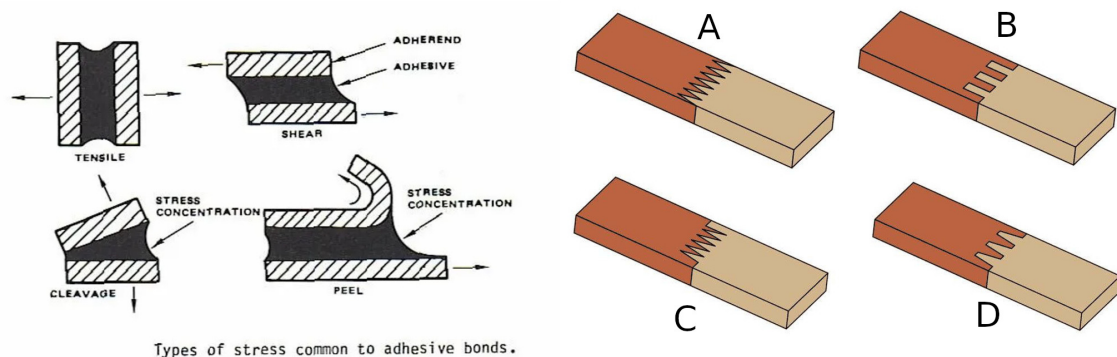
Obrázek 1: Šikmý spoj zvyšuje odolnost vůči namáhání.

Typy lepených spojů a jejich namáhání

Ze života každý zná spojování materiálů lepením. Pokud na pevnosti výsledného spoje nezáleží, je lepení jedním z nejjednodušších způsobů spojování materiálů. V praxi ovšem často potřebujeme, aby spoj byl trvanlivý a pevný. Tedy aby unesl velké silové zatížení.

Lepidla garantují zpravidla odolnost vůči normálovému namáhání tahem a vůči namáhání smykem, které nepřekročí hodnoty dané výrobcem lepidla. Namáháním rozumíme mechanické napětí, které je podílem působící síly a plochy, na kterou síla působí. V případě normálového napětí je uvažována síla kolmá na plochu, v případě namáhání smykem je síla rovnoběžná s plochou. Deformace způsobené těmito silami jsou na obrázku vlevo, přičemž “Tensile” ilustruje normálové namáhání tahem a “Shear” smykové namáhání.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.



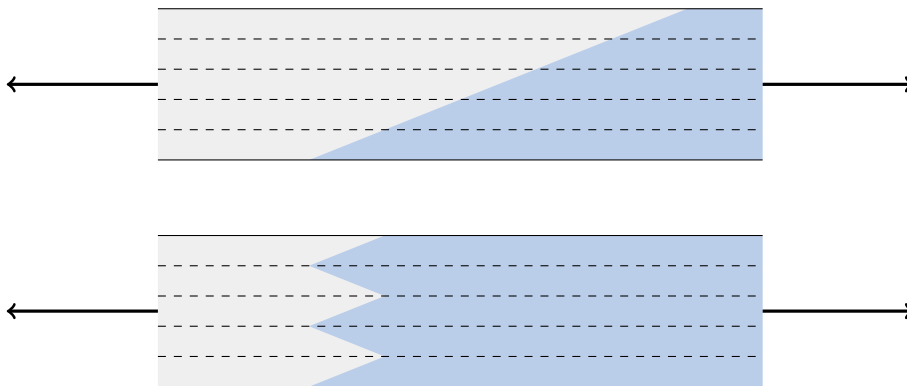
Obrázek 2: Vlevo v černobílém obrázku typy namáhání lepeného spoje. V horní řadě vlevo normálové namáhání spoje tahem (Tensile) a vpravo namáhání smykem (Shear). Vpravo v barevném obrázku metody umožňující rozložit normálové namáhání na větší plochu a do více komponent.

Odolnost spoje souvisí s použitým lepidlem a s lepenými materiály. Údaje lze nalézt u výrobců a mohou vypadat například takto:

- Spoj lepený vteřinovým lepidlem Loctite 421 má pevnost 18MPa až 26 MPa na oceli a 5MPa až 20MPa na polykarbonátu.
- Spoj lepený disperzním lepidlem Herkules má pevnost ve smyku při lepení dřeva 8MPa.
- Spoj lepený lepidlem MAMUT Glue má pevnost v tahu 2,18MPa a ve smyku 1,40MPa.

Protože namáhání spoje se určuje jako podíl síly a plochy, pro snížení namáhání se snažíme zmenšit silové působení rozložením do více směrů a na větší plochu. Ukázkou jsou spoje na předchozí obrázku vpravo. U spoje B jsou čelní plochy namáhané normálovým napětím doplněny plochami namáhanými čistě smykem.

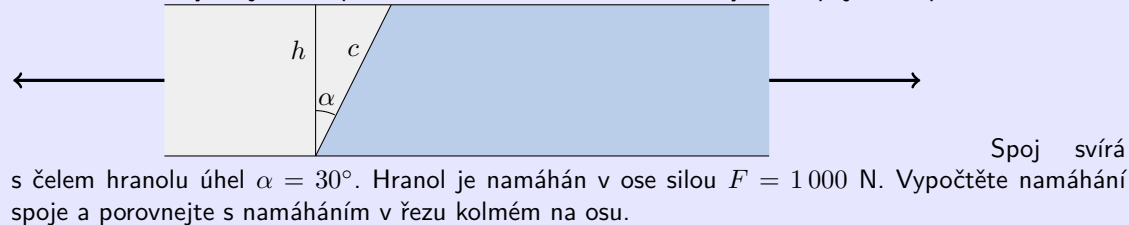
Pro nás bude zajímavější spojení šikmým spojem, protože při něm je spoj vystaven současně normálovému i smykovému namáhání. Poznamenejme, že v praxi šikmý spoj často vidíme realizovaný jinak, než je na úvodním obrázku. Důvod je ten, že je výhodnější mít spoj více skloněný, ale příliš šikmý spoj by zabíral velký prostor. V praxi je proto takový spoj realizován s přerušeními, s otočením každé druhé části a se zarovnáním jednotlivých částí nad sebe.



Obrázek 3: Praktická realizace šikmého spoje. Nosník rozdělíme myšlenými podélnými řezy, v každé druhé vrstvě řez otočíme a všechny části zarovnáme nad sebe.

Namáhání šikmého spoje

Úloha 1. Uvažujme hranol o šířce $b = 4$ cm a výšce $h = 3$ cm, který je slepen ze dvou kusů šikmým spojem podle obrázku.



Řešení. V rovině kolmé na osu má řez tvar obdélníka se stranami b a h . Síla F vyvolá v této rovině tahové napětí

$$\sigma = \frac{F}{bh} = \frac{1000 \text{ N}}{3 \times 4 \text{ cm}^2} = 833\,333 \text{ Pa} = 0,833 \text{ MPa}.$$

Normálové namáhání spoje σ_N vypočteme vztahem

$$\sigma_N = \frac{F_N}{S},$$

kde F_N je velikost normálové síly a S je obsah plochy spoje. Smykové namáhání σ_G vypočteme podobně jako normálové vztahem

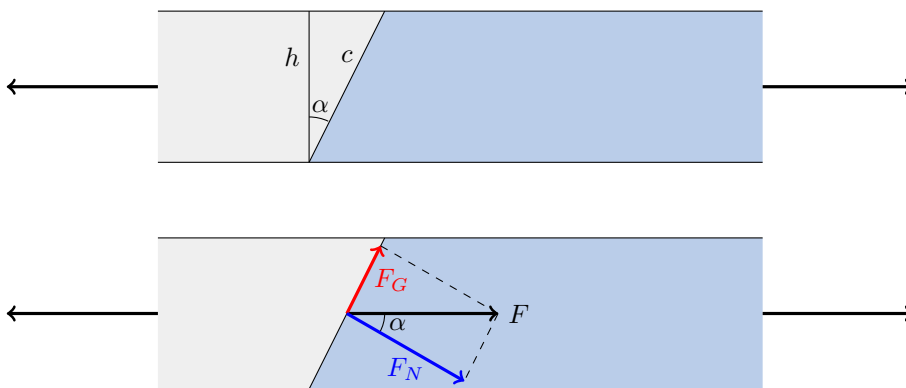
$$\sigma_G = \frac{F_G}{S},$$

kde F_G je velikost smykové síly.

V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou F a odvěsnami F_N a F_G můžeme určit vnitřní úhly díky vlastnostem doplňkového a souhlasných úhlů. Z tohoto trojúhelníka, pak získáme velikosti sil F_N a F_G :

$$F_N = F \cos \alpha$$

$$F_G = F \sin \alpha$$



Obrázek 4: Šikmý spoj. V horní části trojúhelník pro výpočet délky strany spoje, v dolní části trojúhelník pro rozklad síly F do tečného a normálového směru.

Spoj bude mít tvar obdélníka. Jedna jeho strana bude rovna šířce nosníku. Délku c druhé strany určíme

jako délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, ve kterém známe délku odvěsny h a velikost úhlu α mezi odvěsnou a touto stranou.

Tedy

$$c = \frac{h}{\cos \alpha}$$

a

$$A = bc = \frac{hb}{\cos \alpha}.$$

S využitím odvozených vztahů dostáváme pro normálové napětí hodnotu

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A} = \frac{F \cos \alpha}{\frac{hb}{\cos \alpha}} = \frac{F}{hb} \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

a pro smykové napětí hodnotu

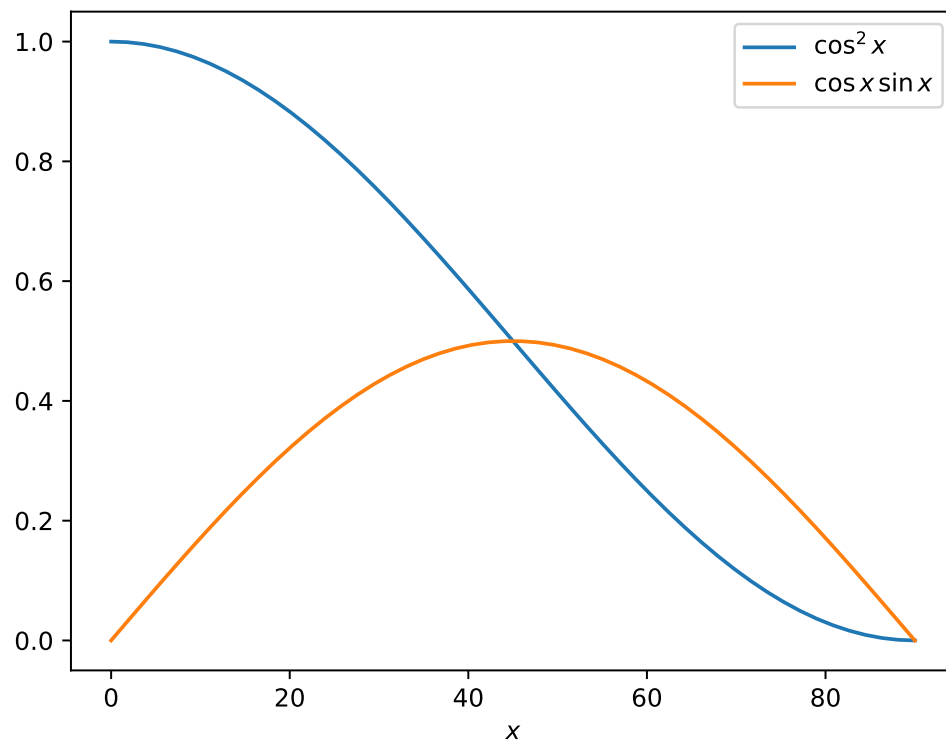
$$\sigma_G = \frac{F_G}{A} = \frac{F \sin \alpha}{\frac{hb}{\cos \alpha}} = \frac{F}{hb} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha.$$

Protože hodnoty goniometrických funkcí $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, udávají, v jakém poměru se rozdělí namáhání tyče na normálovou a smykovou složku, jsou menší než jedna (úhel je nenulový), budou obě hodnoty σ_N i σ_G menší než σ . Průběh funkcí $\sin x \cos x$ a $\cos^2 x$ je na obrázku níže. Pro úhel $\alpha = 30^\circ$ a zadané parametry nosníku a silového působení dostáváme

$$\sigma_N = 0,625 \text{ MPa}$$

a

$$\sigma_G = 0,361 \text{ MPa}.$$



Obrázek 5: Průběh funkcí $\cos^2 x$ a $\cos x \sin x$. Tyto funkce udávají, v jakém poměru se rozdělí namáhání tyče na normálovou a smykovou složku.

Úlohy pro samostatnou práci

Úloha 2. Určete, pro jaký úhel bude smykové smykové napětí v Úloze 1 maximální. Určete i odpovídající normálové napětí.

Řešení.

V Úloze 1 byl odvozen vzorec pro smykové napětí ve tvaru

$$\sigma_G = \sigma \sin \alpha \cos \alpha.$$

Užitím vzorce pro dvojnásobný úhel dostáváme

$$\sigma_G = \frac{1}{2} \sigma \sin(2\alpha)$$

a odsud vidíme (viz i obrázek v řešení Úlohy 1), že maximální hodnota smykového napětí je pro úhel $\alpha = 45^\circ$ a v tomto případě bude platit $\sigma_G = \frac{1}{2} \sigma$. Pro normálové napětí jsme odvodili vzorec

$$\sigma_N = \sigma \cos^2 \alpha$$

a pro $\alpha = 45^\circ$ dostáváme $\sigma_N = \frac{1}{2}\sigma$. Při maximálním smykovém napětí tedy budou obě napětí (smykové i normálové) stejné a rovny polovině hodnoty σ . Tato situace nastane pro spoj pod úhlem 45° .

Úloha 3. Lepidlo garantuje že spoj odolá normálovému namáhání 10 MPa a smykovému namáhání 8 MPa. Jaká maximální síla může zatížit spoj z Úlohy 1? Jak by se odpověď na tuto otázku změnila pro spoj pod úhlem 45° ?

Řešení. Z odvozených vztahů pro obě napětí vyjádříme σ . Získáváme

$$\sigma = \frac{\sigma_N}{\cos^2 \alpha}$$

a

$$\sigma = \frac{\sigma_G}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Po vyjádření hodnoty napětí pomocí síly ze vzorce

$$\sigma = \frac{F}{bh}$$

a osamostatnění síly dále dostáváme

$$F = \frac{bh\sigma_N}{\cos^2 \alpha}$$

a

$$F = \frac{bh\sigma_G}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Pro rozměry z Úlohy 1 a pro zadané $\sigma_N = 10$ MPa a $\sigma_G = 8$ MPa vypočteme

$$F = \frac{3 \times 4 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ MPa}}{\cos^2 30^\circ} = 16\,000 \text{ N}$$

a

$$F = \frac{3 \times 4 \text{ cm}^2 \times 8 \text{ MPa}}{\sin 30^\circ \cos 30^\circ} = 22\,170 \text{ N}.$$

Maximální síla, která může zatížit tento spoj, je tedy 16 000 N.

Pro úhel $\alpha = 45^\circ$ dostáváme podobně hodnoty

$$F = \frac{3 \times 4 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ MPa}}{\cos^2 45^\circ} = 24\,000 \text{ N}$$

a

$$F = \frac{3 \times 4 \text{ cm}^2 \times 8 \text{ MPa}}{\sin 45^\circ \cos 45^\circ} = 19\,200 \text{ N}.$$

Odsud vidíme, že maximální síla, která může spoj zatížit, je v tomto případě 19 200 N.

Závěrečné poznámky

Namáhání v rovině spoje

Studovali jsme síly, které se snaží porušit spoj normálovým namáháním kolmo na spoj a smykovým namáháním. Kromě toho silové působení může ještě v rovině spoje natahovat spoj jako celek. V uvedené analýze nás tato komponenta nezajímala. Je však možné ji obdržet ze vzorce pro normálové napětí σ_N otočením o úhel 90 stupňů.

Analýza defektů

Rozklad namáhání do předem zvolených směrů se používá i v jiných situacích inženýrské praxe, než je lepení. Například pokud je uvnitř namáhaného materiálu trhlina, znalost silového působení umožní zhodnotit rizika dalšího šíření tohoto defektu. Je potom přirozené mechanické namáhání transformovat do směru defektu podobně, jako jsme transformovali do směru spoje.

Mechanické modelování kompozitních materiálů

Mechanické namáhání je vhodné transformovat do zkoumaných směrů i při studiu deformace kompozitních materiálů. Může se jednat o umělé kompozity nebo i o kompozity přírodní. Umělé kompozity jsou například materiály vyztužené vlákny. Mezi přírodní kompozity patří i nejrozšířenější konstrukční materiál, dřevo. Tyto kompozity mají díky své struktuře v různých směrech různé vlastnosti a při studiu mechanického působení na takové materiály je jednodušší studovat odděleně namáhání ve směrech, které souvisejí se strukturou tohoto kompozitu. Například namáhání ve směru ztužujících vláken u umělých kompozitů nebo namáhání v podélném směru (po letech) u dřeva. Obecně se jedná o namáhání v osách nebo rovinách symetrie materiálu. V těchto směrech je známa reakce materiálu na namáhání. Reakci na namáhání v jiných směrech můžeme určit tak, že namáhání rozložíme do jednotlivých směrů, určíme odpovídající deformace a informace opět složíme abychom získali celkovou reakci materiálu. Inženýři tuto problematiku znají jako tzv. transformaci tenzorů a mají celou řadu technik, jak rychle a efektivně úlohy zadaného typu řešit.

Literatura a odkazy

Literatura

- <https://www.lepidlatmely.cz/loctite-421-20-g-vterinove-lepidlo/>, online, 2024-04-28
- <https://www.druchema.cz/z1530-herkules-250g>, online, 2024-04-28
- <https://www.deko.ee/en/a/mamut-glue-25ml-25-ml>, online, 2024-04-29

Zdroje obrázků

- <https://theepoxyexperts.com/general-bonding-design-guideline/>

-
- <https://homemade-furniture.com/woodworking-joints/finger-joint/>
 - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Glue_Bottle_-_The_Noun_Project.pdf