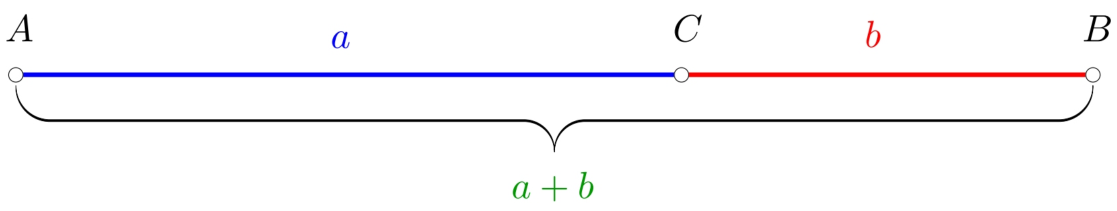
Zlatý rez a reťazový zlomok

Keywords: rovnice a nerovnice, reťazový zlomok, kvadratická rovnica

Majme úsečku AB a bod C, ktorý na nej leží. Bod C rozdeľuje úsečku AB v zlatom reze, ak dĺžky úsekov spĺňajú rovnicu

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

Tento pomer sa často označuje gréckym písmenom φ a má hodnotu približne $1{,}618$.



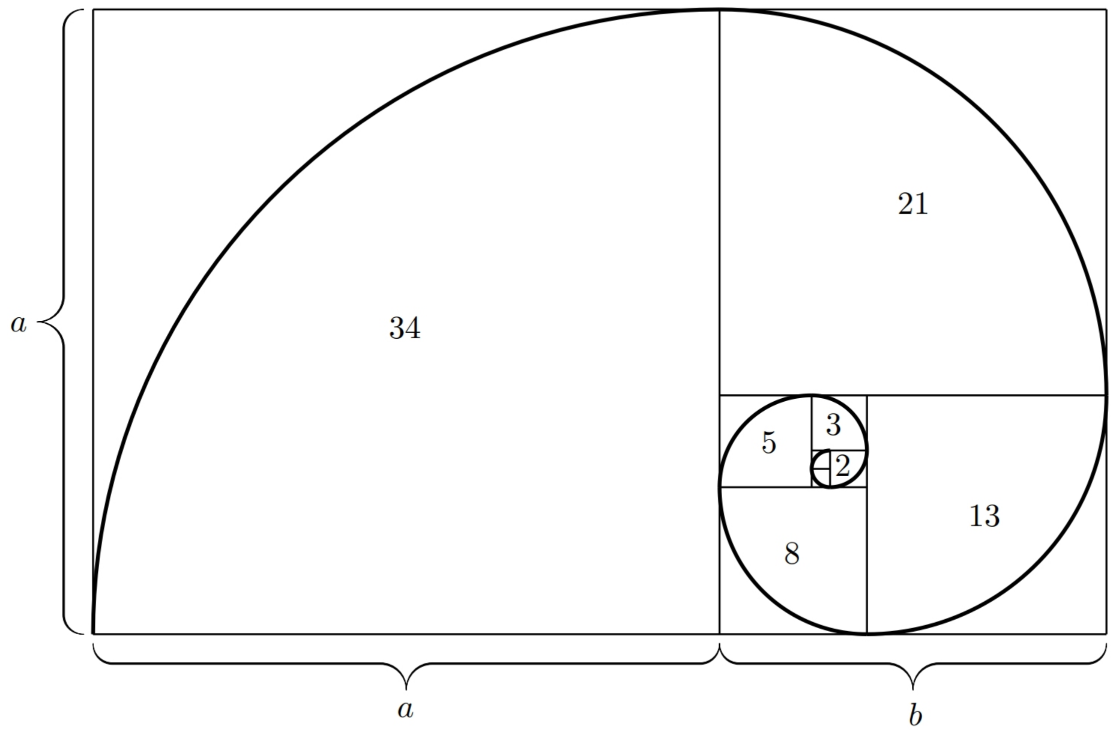
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Obr. 1: Úsečka rozdelená v pomere zlatého rezu

Zlatý rez sa v bežnom živote využíva napríklad pri platobných kartách. Tie majú tvar tzv. zlatého obdĺžnika, ktorého strany spĺňajú pomer zlatého rezu. Zlatý obdĺžnik je obľúbený pre svoj vyvážený vzhľad – nie je ani príliš dlhý, ani príliš široký.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.

Funded by the European Union



Obr. 2: Zlatý obdĺžnik a zlatá špirála

Zlatý rez úzko súvisí s Fibonacciho postupnosťou. Členy tejto postupnosti sú čísla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., kde každý ďalší člen postupnosti získame súčtom dvoch predchádzajúcich členov. Jednotlivé členy tejto postupnosti nazývame Fibonacciho čísla. Aká je súvislosť medzi Fibonacciho postupnosťou a zlatým rezom? Platí, že limita podielu dvoch po sebe idúcich členov tejto postupnosti sa rovná zlatému rezu φ. Ak zostrojíme štvorce, ktorých strany majú dĺžky zodpovedajúce práve Fibonacciho číslam, môžeme ich pekne usporiadať vedľa seba do tvaru zlatého obdĺžnika ako môžme vidieť na obrázku. Do každého štvorca môžeme vpísať štvrtinu kružnice a získame tzv. zlatú špirálu. Zlatá špirála je špeciálnym prípadom logaritmickej špirály.

V prírode sa zlatý rez objavuje vo forme Fibonacciho postupnosti. Nájdeme ho v usporiadaní listov na stonke – listy rastú jeden nad druhým tak, aby sa navzájom netienili, pričom prechod z jedného listu na druhý má charakter špirálovitého rastu okolo stonky. Podobné usporiadanie nájdeme v šupinách šišky, semenách slnečnice alebo v kôre ananásu. Logaritmická špirála sa vyskytuje aj v ulitách mäkkýšov či v mladých listoch papradí. Tento tvar tiež majú tornáda, cyklóny a galaxie.

Zlatý rez sa často využíva v umení na dosiahnutie esteticky pôsobiacich a harmonických kompozíciach. Maliari a fotografi používajú tento pomer na určenie umiestnenia kľúčových prvkov vo svojich dielach. Architekti často integrujú zlatý rez do návrhov budov.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Nekonečný reťazový zlomok

Nekonečný reťazový zlomok je výraz typu

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

kde a_0 je celé číslo a čísla a_i sú kladné prirozené čísla pre $i \in \mathbb{N}$. Reťazový zlomok môže byť aj konečný.

Zlatý rez môžeme vyjadriť nekonečným reťazovým zlomkom

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

Úloha 1. Vypočítajte približné hodnoty zlatého rezu pomocou konečných zlomkov:

1. $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}},$$

2. $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}.$$

Úloha 2. Vypočítajte presnú hodnotu zlatého rezu φ.

Úloha 3. Vyriešte rovnicu inšpirovanú zlatým rezom v konečnom reťazovom zlomku

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}.$$

Literatúra

- Wikipedia. *Golden ratio* [online]. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio [cit. 10.,11.,2023].

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

- Wikipedia. *Řetězový zlomek* [online]. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Řetězový_zlomek [cit. 10.,11.,2023].

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union