

Math4You

2023–2025

Twisted Prism

How to create a twisted prism from a right square prism (regular quadrilateral prism)

There is a shape in furniture design, that is interesting from a geometric point of view. It can be created from a right square prism by dividing each side into two triangles by one of the diagonals and rotating the top base by 90° , as shown in Figure 1. While maintaining the lengths of the edges and diagonals, the height of the prism changes. The resulting shape is a special case of the so-called *twisted prism*.

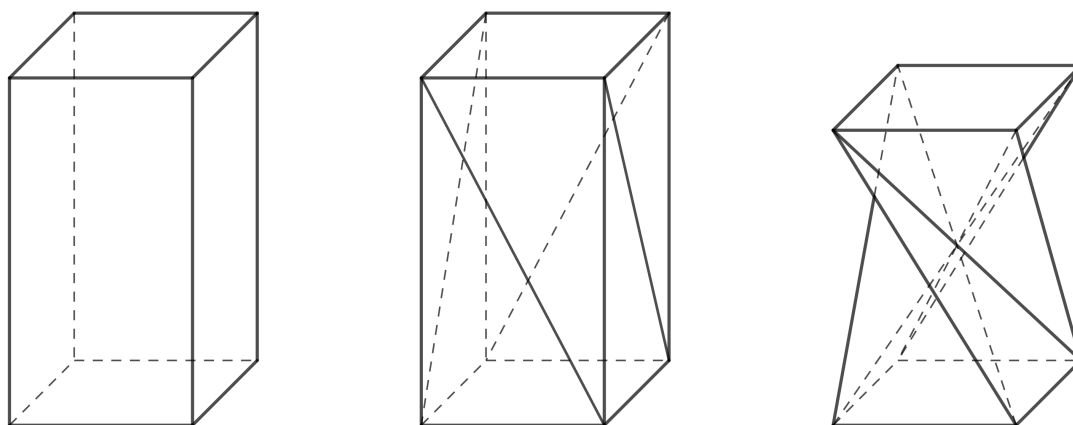


Figure 1: Transformation of a regular quadrilateral prism into its twisted variant while maintaining the lengths of the edges

Let's try to create this shape from a box from baby syrup or eye drops, for example. For everything to work it is necessary that the lids of the box (top and bottom base of the prism) are square-shaped and

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.

they could be flipped or unfolded in some way. Creating a collapsed prism requires a bit of practice and skill, because the 90° rotation cannot be done so easily in practice.

We can use the following procedure.

- We open the lids of the box and fold the box flat (two lateral faces, two lateral faces on the bottom).
- Divide all the lateral faces by diagonals in one direction, as shown in the picture. We are trying to make grooves in the paper where the paper can be folded.
- We break all the resulting diagonals slightly inwards.
- Perform a crossover. Hold the bottom part lightly with one hand, take the upper lower part, lift and move it to the left.
- Now we will unfold the box from the plane into the space. This step takes some practice. We can do this by pressing the box with two fingers against each other at the point where all the marked diagonals lie on top of each other. At the same time, try to spread the top or bottom part of the box into space with the other hand.
- If you have succeeded in the previous step, the only thing left to do is to close the lids of the box and you're done. Congratulations!

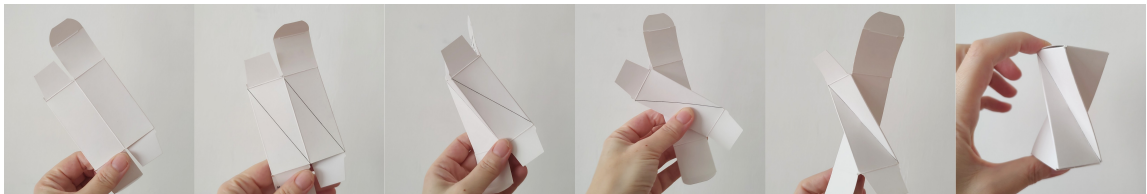


Figure 2: The process of making a collapsed prism from a box

Exercise 1. We want to create a stool in the shape of a twisted prism and we have a number of cardboard boxes available.. These boxes have the same square bases with an edge length of 40 cm, but different heights. For seating, we have tested that a stool height of 50 cm suits us What is the ideal height of the box for making a stool in in the shape of a quadrilateral twisted prism with a height of 50 cm? The length of the edge of the base is $a = 40$ cm

Solution. The original side edge of the prism of length v , the height of the chair h and the edge of the lower base a form a right triangle. The edge a is the perpendicular projection of the edge v into the plane of the lower base (see figure).

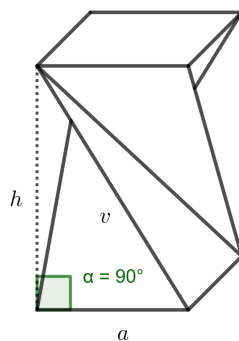


Figure 3: Rectangular triangle

According to the Pythagorean theorem, it holds

$$v = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{50^2 + 40^2} \doteq 64 \text{ cm.}$$

The cardboard box should ideally be about 64 cm in height.

Další zborcené hranoly

Šlo by obdobný tvar vytvořit i z kolmých hranolů, jejichž podstava by byl jiný pravidelný n -úhelník?

Odpověď zní ano. Postup uvedený výše však je možné aplikovat pouze pro sudá n . Pro lichá n není možné složení do roviny překřížením, jak je uvedeno v postupu.

Vypočítejme výšku tělesa vzniklého zborcením pravidelného šestibokého hranolu pro obecnou výšku a délku strany.

Rozmyslete si nejdříve, o kolik stupňů se tomto případě horní podstava pootočí. Pokud prostorová představivost selhává, vytvořte si model. Pro jednoduchost stačí pracovat se sítí pláště hranolu.

Na Obrázku 4 je taková síť již připravená ke slepení (ideální je tvrdší papír).

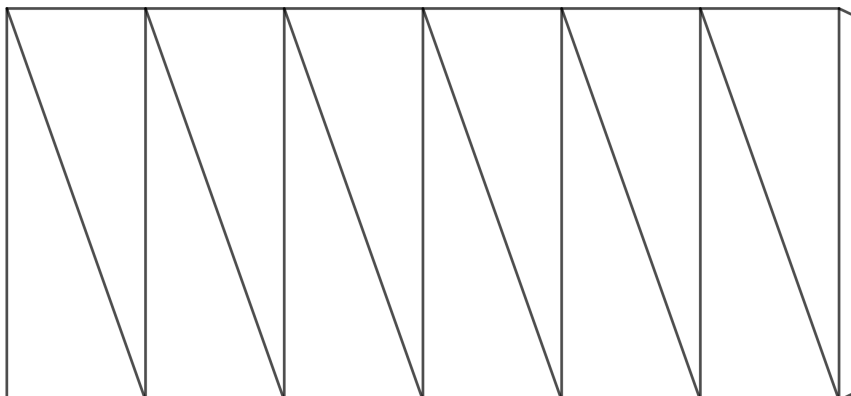


Figure 4: Sít pláště šestiokého zborceného hranolu

Před slepením vytvořte ohyby v hranách a úhlopříčkách. Ve hranách směrem nahoru, v úhlopříčkách směrem dolů. Po slepení postupujte podle Obrázku 5.

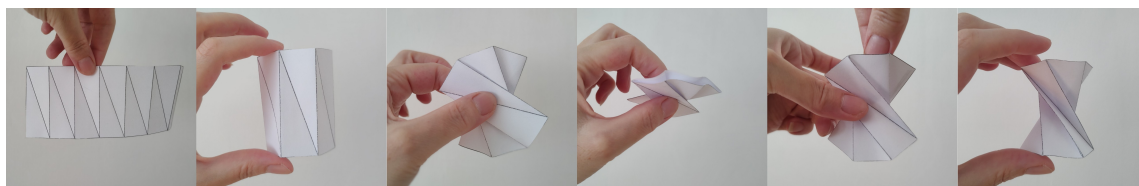


Figure 5: Postup pro tvorbu šestiokého zborceného hranolu

Úloha 2. Jak závisí výška h šestiokého zborceného hranolu (který vznikne z pravidelného šestiokého hranolu) na výšce původního hranolu v a hraně a dolní podstavy?

Řešení. K výpočtu je třeba znát úhel o který se jedna podstava pootočí vzhledem k druhé. Ten lze určit z modelu popsaného výše. Následující prostorový obrázek úhel rotace prozrazuje.

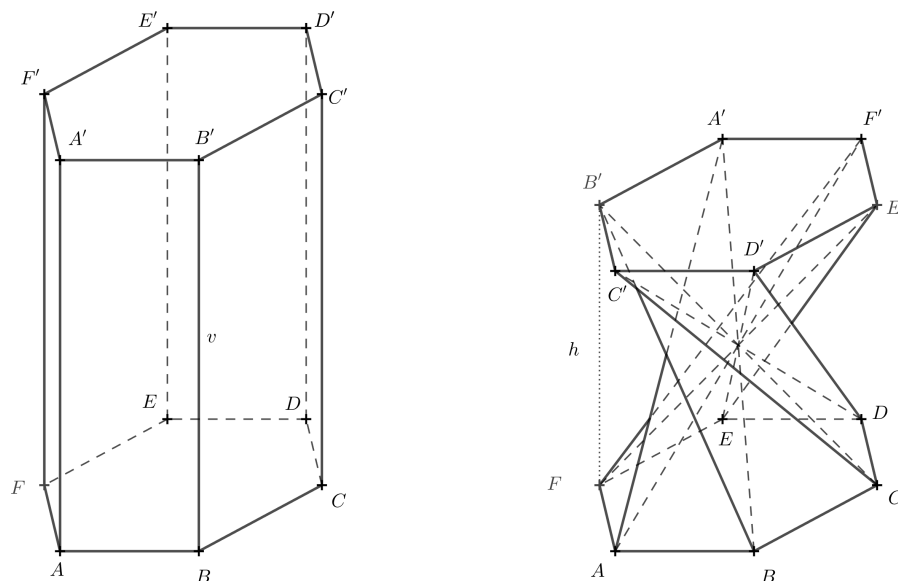


Figure 6: Vznik zborceného hranolu z pravidelného šestibokého hranolu

Pokud je pro někoho trojrozměrný obrázek nepřehledný může si představit, jak těleso vypadá při pohledu shora. Horní podstavu budeme brát nyní jako průhlednou. Úsečky, které byly úhlopříčkami ve stěnách původního hranolu, se protínají v jednom bodě. Při pohledu shora dělí šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ na šest rovnostranných trojúhelníků. (Obrázek 6 vlevo.) Zaměříme se na úsečku $A'B$, která byla úhlopříčkou ve stěně $ABB'A'$. (Viz Obrázek 6 vpravo). Aby tato úsečka procházela středem, musí být $A' = E$, protože bod E je naproti bodu B . Ostatní vrcholy doplníme postupně podle abecedy ve stejném směru, v jakém jsou body označeny v dolní podstavě, tj. proti směru hodinových ručiček. Nyní je už jasné, že se horní podstava potočila zhledem ke spodní podstavě o 120° . Díky tomu víme, že hrana BB' leží nad hranou BF a úsečka BF je kolmým průmětem úsečky BB' . Délka hrany BB' je v , délku BF označme v_1 . Výška tělesa h je rovna délce úsečky $B'F$.

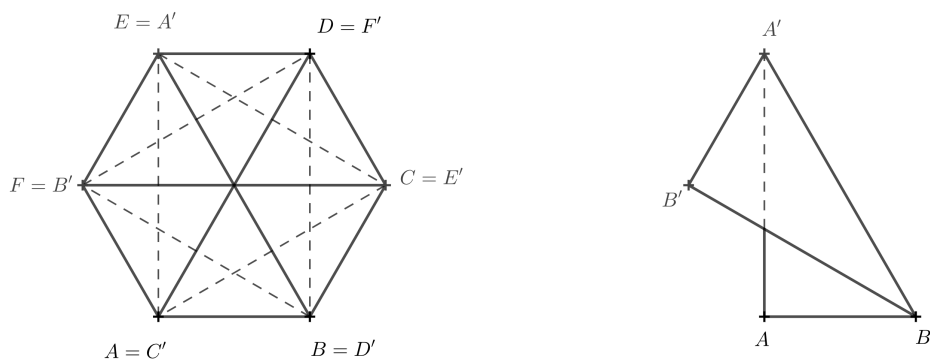


Figure 7: Vlevo pohled shora na šestiboký zborcený hranol (horní podstava průhledná). Vpravo stěna $ABB'A'$ po zborcení

Body F , B a B' tvoří pravoúhlý trojúhelník. Pomocí Pythagorovy věty dostáváme pro výšku vztah

$$h = \sqrt{v^2 - v_1^2}.$$

Zbývá určit v_1 . K tomu použijeme trojúhelník ABF .

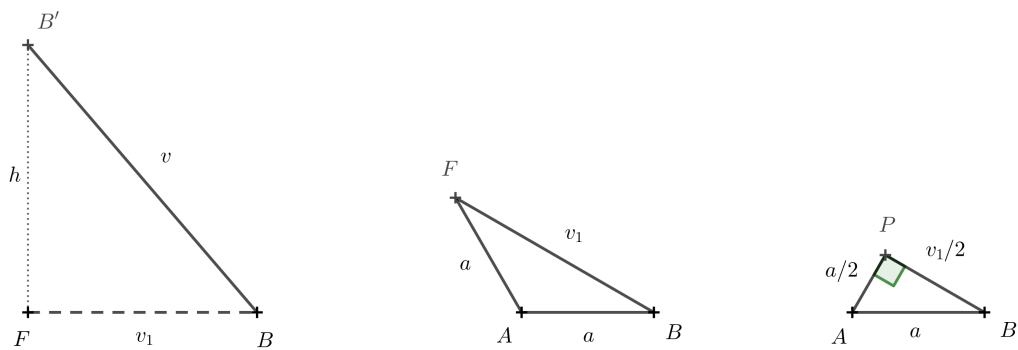


Figure 8: Pravoúhlý trojúhelník

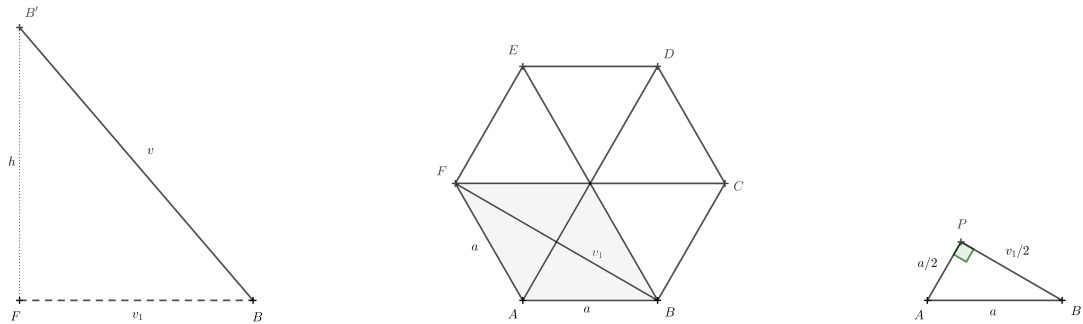


Figure 9: druhá verze obrázku podle Maruščina přání

Postupovat můžeme opět pomocí Pythagorovy věty. K vytvoření pravoúhlého trojúhelníka stačí bodem A vést výšku na stranu AF . Patu této výšky označíme P . Délka této výšky je $\frac{a}{2}$, protože trojúhelník ABP je polovina rovnostranného trojúhelníku o straně a . Platí

$$\frac{v_1}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

a odsud

$$v_1 = a\sqrt{3}.$$

Toto vyjádření nyní můžeme dosadit do vztahu pro h . Tím dostáváme

$$h = \sqrt{v^2 - (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{v^2 - 3a^2},$$

což je hledané vyjádření výšky šestibokého zborceného hranolu pomocí v a a .

Úloha 3. Jaká je omezující podmínka pro vznik modelů z předchozích dvou úloh?

Řešení. V Úloze 1 musí být v větší než a . Pokud by platila rovnost $v = a$, potom by v pravoúhlém trojúhelníku byla přepona stejně dlouhá jako odvěsna a zbylá odvěsna by měla nulovou délku. Výška zborceného hranolu by tedy byla nulová a hranol by se složil do roviny. Úhlopříčky původního hranolu by se stále protínaly v jednom bodě.

Ve Úloze 2 by obdobně muselo platit $v > |AE|$, tedy $v > \sqrt{3}a$. Pro $v = \sqrt{3}a$ by zborcený hranol měl opět nulovou výšku a složil by se do roviny.

Postup pro liché n

Už bylo zmíněno, že pro liché n nelze postupovat tak, jak bylo uvedeno výše. Rozdíl je ale pouze v tom, že po vytvoření sítě pláště není vhodné lepit spoj v boční hraně předtím než vytvoříme požadovaný tvar. Nejprve síť upravíme do tvaru zborceného hranolu a teprve poté slepíme boční hranu.

Postup pro jiný úhel otočení

Co kdybychom chtěli vyrobit tvar podobný tomu z prvního příkladu, ale použít ho jako vázičku na suché květiny nebo stojan na tužky? Nevyhovuje nám v tom případě, že se 4 hrany zborčeného hranolu (bývalé úhlopříčky stěn pravidelného čtyřbokého hranolu) uprostřed hranolu protínají. Chceme, aby uvnitř vznikl volný prostor. Proto potřebujeme zmenšit úhel rotace jedné podstavy vzhledem k druhé.

Úloha 4. Sestrojte síť vázy tvaru zborčeného hranolu, jestliže je dána výška vázy $h = 110$ mm, hrana čtvercové podstavy $a = 65$ mm a úhel rotace horní hrany vázy oproti dolní podstavě je $\alpha = 45^\circ$.

Nápověda. Na Obrázku 9 vlevo je pohled shora na dolní podstavu a na horní podstavu pootočenou o 45° . Napravo jsou znázorněny i všechny hrany vzniklého objektu. Kreslit všechny hrany není třeba, pro konstrukci je důležitá spojnice AA' a BA' . Je třeba si také uvědomit, že při pohledu shora pro kolmý průmět A_1 bodu A' platí $A_1 = A'$.

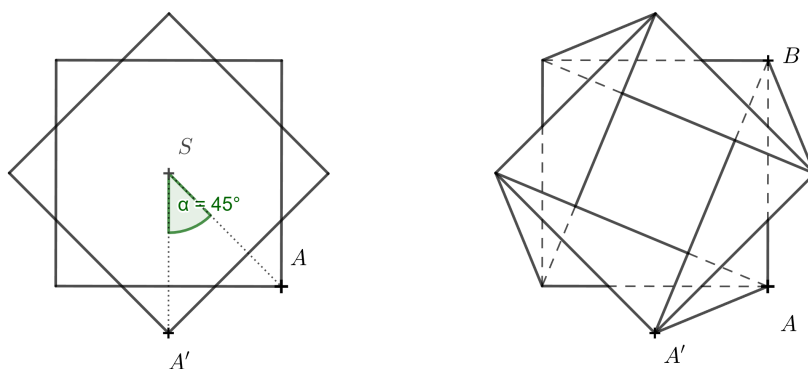


Figure 10: Pohled shora na vázu