

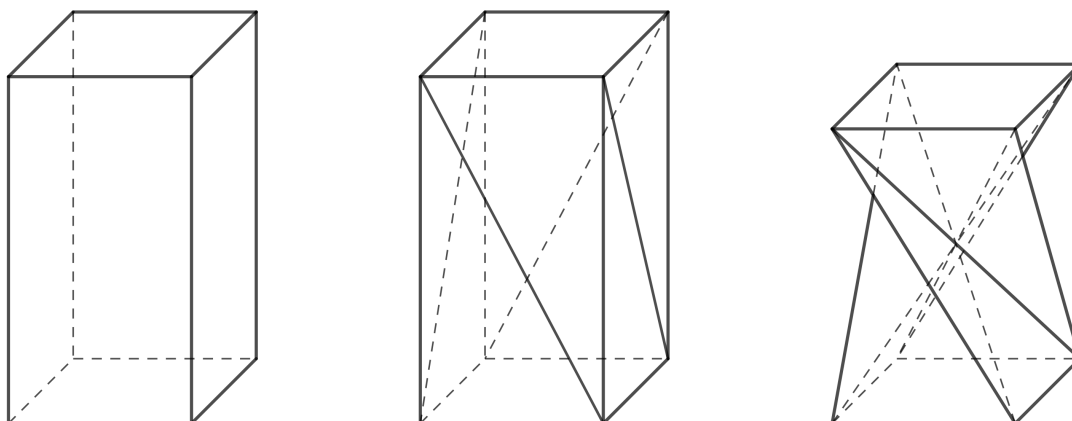
Math4You

2023–2025

Zborcený hranol

Jak vytvořit zborcený hranol z kolmého čtyřbokého hranolu

V designu nábytku se objevuje tvar, který je zajímavý i z geometrického hlediska. Lze ho vytvořit z pravidelného čtyřbokého hranolu rozdělením každé boční stěny na dva trojúhelníky pomocí jedné z úhlopříček a pootočením horní podstavy o 90° tak, jak je to znázorněno na Obrázku 1. Při zachování délek hran a úhlopříček současně dochází ke změně výšky hranolu. Výsledný tvar je speciálním případem tzv. *zborceného hranolu* (v angličtině *twisted prism*).



Obrázek 1: Transformace pravidelného čtyřbokého hranolu na jeho zborcenou variantu

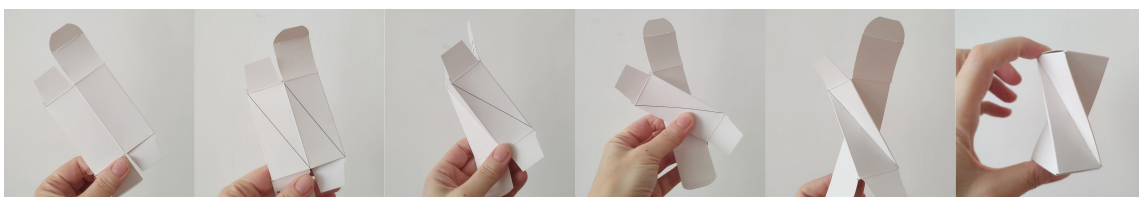
Zkusme si tento tvar vytvořit třeba z krabičky od dětského sirupu nebo očních kapek.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.

Aby vše fungovalo je nutné, aby horní a dolní podstava byly čtvercové a daly se nějakým způsobem odklopit nebo rozložit. K vytvoření zborceného hranolu je třeba trochu praxe a zručnosti, protože ono pootočení o 90° nelze provést v praxi tak jednoduše.

Můžeme použít následující postup.

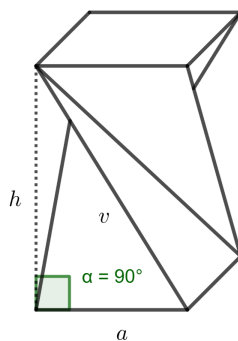
- Odklopíme víčka krabičky a krabičku složíme do roviny (dvě boční stěny nahoře, dvě boční stěny dole).
- Všechny boční stěny rozdělíme úhlopříčkami v jednom směru tak, jak je to na obrázku. Snažíme se v papíru vytvořit rýhy, v nichž půjde papír přehnout.
- Všechny vzniklé úhlopříčky prolomíme mírně směrem dovnitř.
- Provedeme překřížení. Spodní část přidržíme lehce jednou rukou, vrchní část vezmeme, nadzvedneme a přesuneme směrem doleva.
- Nyní z roviny rozložíme krabičku do prostoru. Tento krok chce trochu cviku. Můžeme ho provést tak, že jednou rukou přidržíme místo, kde nad sebou leží všechny zvýrazněné úhlopříčky (stiskneme proti sobě dvěma prsty). Současně se snažíme druhou rukou rozložit horní nebo dolní část krabičky do prostoru.
- Pokud se vám předchozí krok podařil, zbývá už jen zavřít víčka krabičky a máte hotovo. Gratulují!



Obrázek 2: Postup tvorby zborceného hranolu z krabičky

Úloha 1. Chceme vytvořit stoličku ve tvaru zborceného hranolu a máme k dispozici několik vhodných kartonových krabic. Tyto krabice mají stejné čtvercové podstavy o délce hrany 40 cm, ale různé výšky. Pro sezení máme odzkoušené, že nám vyhovuje výška stoličky 50 cm. Jaká výška krabice je ideální pro výrobu stoličky ve tvaru čtyřbokého zborceného hranolu o výšce 50 cm? Hrana podstavy je $a = 40$ cm.

Řešení. Původní boční hrana hranolu o délce v , výška židličky h a hrana dolní podstavy a tvoří pravoúhlý trojúhelník. Hrana a je kolmým průmětem hrany v do roviny dolní podstavy (viz obrázek).



Obrázek 3: Pravoúhlý trojúhelník

Podle Pythagorovy věty tedy platí

$$v = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{50^2 + 40^2} \doteq 64 \text{ cm.}$$

Kartonová krabice by v ideálním případě měla být vysoká přibližně 64 cm.

Další varianty zborcených hranolů

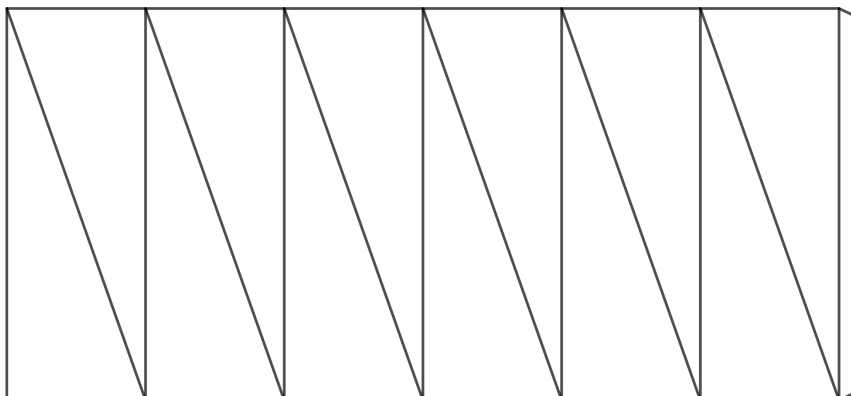
Šlo by obdobný tvar vytvořit i z kolmých hranolů, jejichž podstava by byl jiný pravidelný n -úhelník?

Odpověď zní ano. Postup uvedený výše je však možné aplikovat pouze pro sudá n . Pro lichá n není možné složení do roviny překřížením, jak je uvedeno v postupu.

Vypočítejme výšku tělesa vzniklého zborcením pravidelného šestibokého hranolu pro obecnou výšku a délku strany.

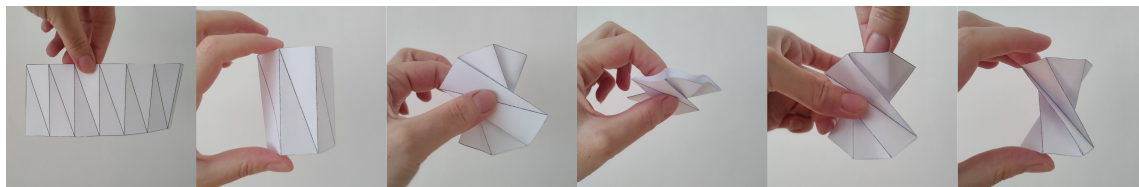
Rozmyslete si nejdříve, o kolik stupňů se tomto případě horní podstava pootočí. Pokud prostorová představivost selhává, vytvořte si model. Pro jednoduchost stačí pracovat se sítí pláště hranolu.

Na obrázku níže je taková síť již připravená ke slepení (ideální je tvrdší papír).



Obrázek 4: Síť pláště šestiokého zborceného hranolu

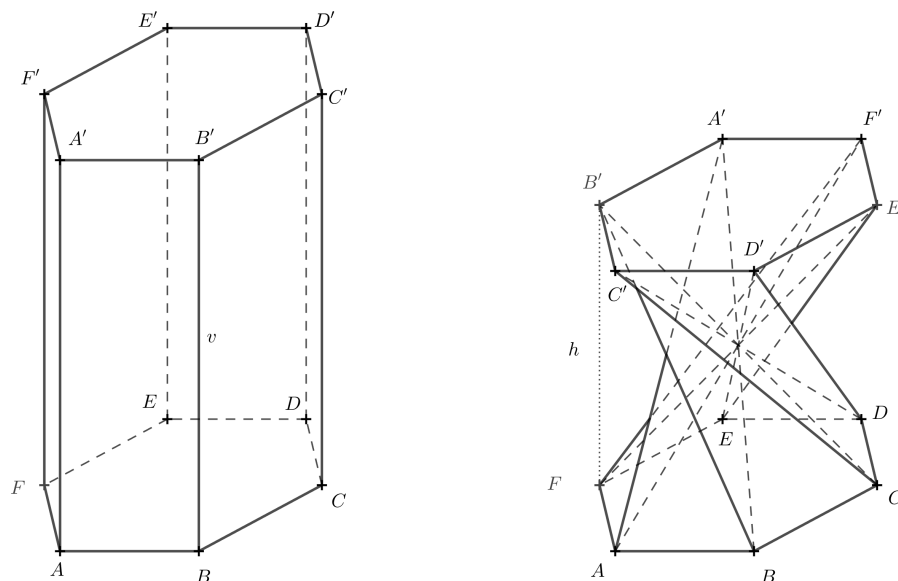
Před slepením vytvořte ohyby v hranách a úhlopříčkách. Ve hranách směrem nahoru, v úhlopříčkách směrem dolů. Po slepení postupujte podle obrázku.



Obrázek 5: Postup pro tvorbu šestiokého zborceného hranolu

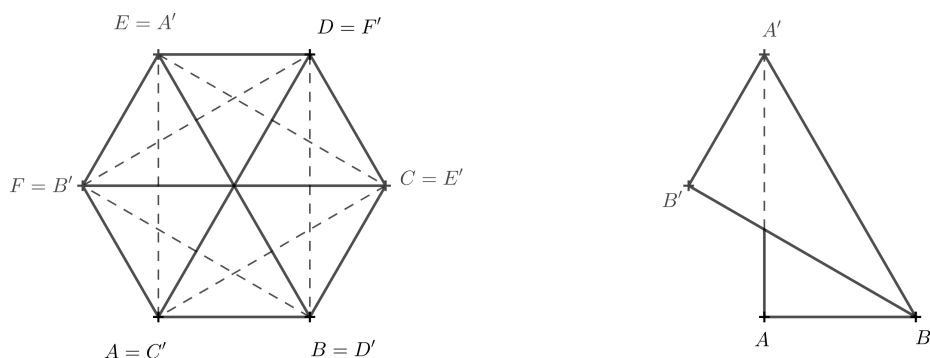
Úloha 2. Jak závisí výška h šestiokého zborceného hranolu (který vznikne z pravidelného šestiokého hranolu) na výšce původního hranolu v a hraně a dolní podstavy?

Řešení. K výpočtu je třeba znát úhel o který se jedna podstava pootočí vzhledem k druhé. Ten lze určit z modelu popsaného výše. Následující prostorový obrázek úhel rotace prozrazuje.



Obrázek 6: Vznik zborceného hranolu z pravidelného šestibokého hranolu

Pokud je pro někoho trojrozměrný obrázek nepřehledný, může si představit, jak těleso vypadá při pohledu shora. Horní podstavu budeme brát nyní jako průhlednou. Úsečky, které byly úhlopříčkami ve stěnách původního hranolu, se protínají v jednom bodě a při pohledu shora dělí šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ na šest rovnostranných trojúhelníků. Zaměříme se na úsečku $A'B$, která byla úhlopříčkou ve stěně $ABB'A'$.



Obrázek 7: Vlevo pohled shora na šestiboký zborcený hranol (horní podstava průhledná). Vpravo stěna $ABB'A'$ po zborcení

Aby tato úsečka procházela středem, musí být $A' = E$, protože bod E je naproti bodu B . Ostatní vrcholy doplníme postupně podle abecedy ve stejném směru, v jakém jsou body označeny v dolní podstavě, tj.

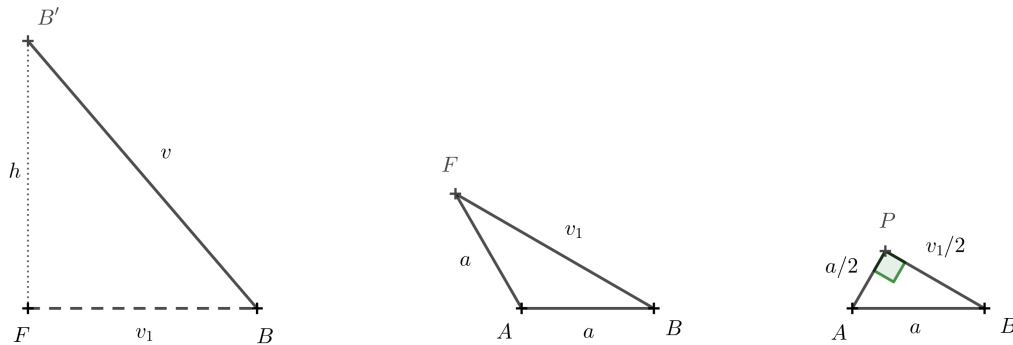
proti směru hodinových ručiček.

Nyní je už jasné, že se horní podstava pootočila vzhledem ke spodní podstavě o 120° . Díky tomu víme, že hrana BB' leží nad hranou BF a úsečka BF je kolmým průmětem úsečky BB' .

Délka hrany BB' je v , délku BF označme v_1 . Výška tělesa h je rovna délce úsečky $B'F$. Body F , B a B' tvoří pravoúhlý trojúhelník. Pomocí Pythagorovy věty dostáváme pro výšku vztah

$$h = \sqrt{v^2 - v_1^2}.$$

Zbývá určit v_1 . K tomu použijeme trojúhelník ABF .



Obrázek 8: Pravoúhlý trojúhelník

Postupovat můžeme opět pomocí Pythagorovy věty. K vytvoření pravoúhlého trojúhelníka stačí bodem A vést výšku na stranu BF . Patu této výšky označíme P . Délka této výšky je $\frac{a}{2}$, protože trojúhelník ABP je polovina rovnostranného trojúhelníku o straně a . Platí

$$\frac{v_1}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

a odtud

$$v_1 = a\sqrt{3}.$$

Toto vyjádření nyní můžeme dosadit do vztahu pro h . Tím dostáváme

$$h = \sqrt{v^2 - (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{v^2 - 3a^2},$$

což je hledané vyjádření výšky šestibokého zborceného hranolu pomocí v a a .

Úloha 3. Jaká je omezující podmínka pro vznik modelů z předchozích dvou úloh?

Řešení. V Úloze 1 musí být v větší než a . Pokud by platila rovnost $v = a$, potom by v pravoúhlém trojúhelníku byla přepona stejně dlouhá jako odvěsna a zbylá odvěsna by měla nulovou délku. Výška zborceného hranolu by tedy byla nulová a hranol by se složil do roviny. Úhlopříčky původního hranolu by se stále protínaly v jednom bodě.

V Úloze 2 by obdobně muselo platit $v > |AE|$, tedy $v > \sqrt{3}a$. Pro $v = \sqrt{3}a$ by zborcený hranol měl opět nulovou výšku a složil by se do roviny.

Postup pro liché n

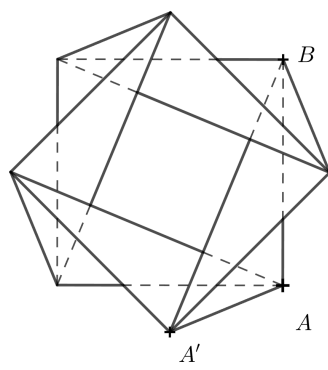
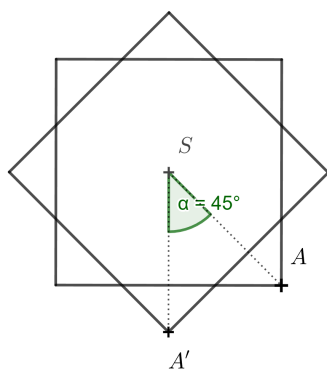
Už bylo zmíněno, že pro liché n nelze postupovat tak, jak bylo uvedeno výše. Rozdíl je ale pouze v tom, že po vytvoření sítě pláště není vhodné lepit spoj v boční hraně předtím než vytvoříme požadovaný tvar. Nejdříve síť upravíme do tvaru zborceného hranolu a teprve poté slepíme boční hranu.

Postup pro jiný úhel otočení

Co kdybychom chtěli vyrobit tvar podobný tomu z prvního příkladu, ale použít ho jako vázičku na suché květiny nebo stojan na tužky? Nevyhovuje nám v tom případě, že se 4 hrany zborceného hranolu (bývalé úhlopříčky stěn pravidelného čtyřbokého hranolu) uprostřed hranolu protínají. Chceme, aby uvnitř vznikl volný prostor. Proto potřebujeme zmenšit úhel rotace jedné podstavy vzhledem k druhé.

Úloha 4. Sestrojte síť vázy tvaru zborceného hranolu, jestliže je dána výška vázy $h = 110$ mm, hrana čtvercové podstavy $a = 65$ mm a úhel rotace horní hrany vázy oproti dolní podstavě je $\alpha = 45^\circ$.

Nápověda. Na obrázku vlevo je pohled shora na dolní podstavu a na horní podstavu pootočenou o 45° . Napravo jsou znázorněny i všechny hrany vzniklého objektu. Kreslit všechny hrany není třeba, pro konstrukci je důležitá spojnice AA' a BA' . Je třeba si také uvědomit, že při pohledu shora pro kolmý průmět A_1 bodu A' platí $A_1 = A'$.



Obrázek 9: Pohled shora na vázu