



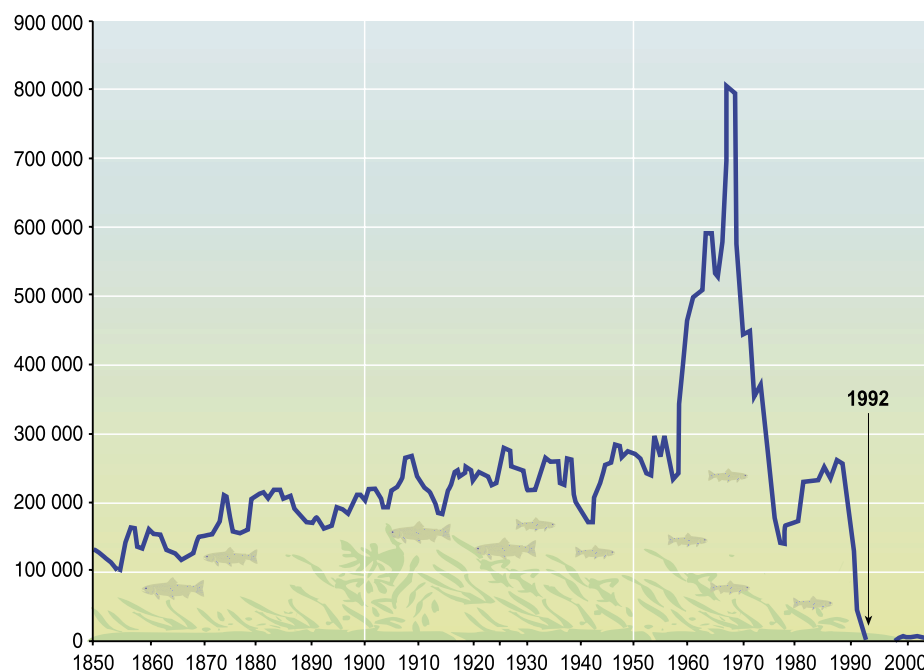
Math4You

2023–2025

Kolaps lovišť

Přímořské státy mají na dosah obrovské bohatství v podobě ryb v oceánech. Zdánlivě je toto bohatství nekonečné a stabilní. Že tomu tak není se však lidstvo poučilo v několika trpkých lekcích. Jedna z nich se datuje do roku 1992. Záliv u Newfoundlandu byl vždy bohatý na tresky (*Gadus morhua*, Treska obecná). Loď, která sem přijela lovit, nikdy neodjížděla s prázdnou. Situace se však časem začala měnit. Koncem osmdesátých let biologové volali po nutnosti omezení lovu na polovinu, aby nedošlo k vydrancování lovišť. Protože by však omezení lovu mohlo oblast stáhnout do recese, vláda k omezení lovu nepřistoupila. Bohužel, příroda si poručit nedá. Postupně situace dospěla do stavu, kdy zastavení lovu bylo nevyhnutelné. Stavy tresky se propadly na pouhé jedno procento původních hodnot. Proto bylo na lov vyhlášeno moratorium. Zprvu dvouleté, ale malé stavy tresky se jenom pozvolna obnovují. Proto omezení trvala mnohem déle, než bylo původně předpokládáno. Po určité naději na uvolnění v roce 2015 došlo k opětovnému snížení povolené míry lovu v roce 2018 po opětovném propadu populace. Moratorium na lov mělo za následek ztrátu zaměstnání pro 35 tisíc rybářů a zaměstnanců továren na zpracování ryb a obrovské ekonomické a sociologické dopady na celý region.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.



Obrázek 1: Graf zachycuje vývoj lovu tresky v newfoundlandských lovištích v tunách ryb. Zdroj: Millennium Ecosystem Assessment

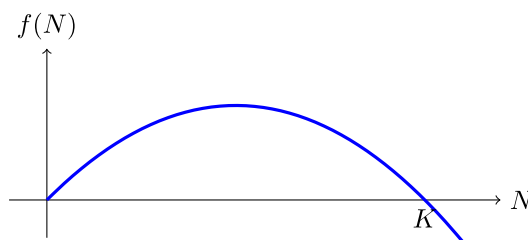
Nutno dodat, že popsáný případ není nijak ojedinělý. Současně s kolapsem newfoundlandských lovišť došlo k podobné situaci i na dalších pěti kanadských lovištích, na kterých bylo vydáno moratorium lovu v roce 1993 (Southern Grand Bank, St. Pierre Bank, Northern Gulf of St. Lawrence, Southern Gulf of St. Lawrence, Eastern Scotian Shelf). A četli jste Steinbeckův román *Na plechárně* z roku 1945? V něm je popsán život v okolí továrny na zpracování sardinek v Kalifornii. Už krátce po vydání tohoto románu začala loviště vlivem neudržitelného lovu kolabovat a v roce 1967 zde musel být komerční lov zakázán.

Modelování růstu populace

Aby ke kolapsům lovišť nedocházelo a abychom dokázali realisticky a účinně modelovat růst populací v přírodě, byly vyvinuty účinné a časem prověřené matematické modely. Jeden z jednoduchých ale dostatečně přesných modeluje rychlost růstu populace pomocí kvadratické funkce

$$f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

kde N je velikost populace, $f(N)$ je rychlost růstu populace, a r a K jsou konstanty. Konstanta K se nazývá nosná kapacita prostředí. Konstanty r a K určují reprodukční schopnosti populace a vliv životního prostředí na populaci. Tyto konstanty daly i název dvěma základním životním strategiím, které slouží k tomu, aby se populace v přírodě úspěšně uchytila a prosperovala. Populace, které se řadí mezi r -strategie, se dokáží rychle množit. O potomky příliš nepečují a péči vynahrazují množstvím. Tyto populace mají velkou hodnotu konstanty r . Oproti tomu K -strategie mají mláďat málo, ale pečují o ně a dokáží se lépe vyrovnávat se změnami v životním prostředí. Proto jsou velikosti jejich populace blíže k nosné kapacitě prostředí, než je tomu u r -strategů.



Obrázek 2: Rychlost růstu populace jako funkce velikosti populace.

Rychlost růstu udává, o kolik se zvětší velikost populace za jednotku času. Je-li nulová, velikost populace se nemění. Je-li rychlost růstu kladná a numericky velká, velikost populace roste rychle. Je-li rychlost růstu záporná, velikost populace se snižuje a populace vymírá. Průběh funkce modelující růst je zachycen na obrázku. Tento model zachycuje známá fakta, že populace malé velikosti se rozmnožuje pomalu (malá populace má málo jedinců a tím pádem i málo jedinců schopných reprodukce) a že větší populace se rozmnožuje rychleji, ale pouze do určité míry, kterou povolí nosná kapacita prostředí.

Úlohy

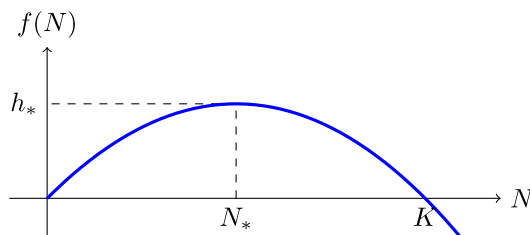
Uvažujme hypotetickou populaci vystavenou lovu. Velikost populace budeme měřit ve vhodných jednotkách. To může být v počtu jedinců, v tisících jedinců, v tunách a podobně. Uvažujme například parametry $K = 1000$ a $r = 0,1$. To znamená, že velikost populace, která se v prostředí trvale udrží, je 1000 a malá populace, která netrpí vnitrodruhovou konkurencí, roste o 10% aktuální velikosti za jednotku času.

Úloha 1. Určete, pro jakou velikost populace N_* je rychlost růstu maximální a jak velká tato rychlost je. Tuto hodnotu nadále budeme značit h_* , protože to je současně maximální teoreticky možná intenzita lovu (angl. harvesting). Hodnota N_* je velikost populace při této maximální intenzitě.

Řešení. Funkce

$$f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

která popisuje růst, je kvadratická a jejím grafem je parabola. Přičemž tento graf má smysl uvažovat jen pro $N \geq 0$.



Obrázek 3: Rychlost růstu populace jako funkce velikosti populace s vyznačením maximální možné intenzity lovu h_* a odpovídající stabilní velikosti populace N_* .

Jelikož je funkce dána ve tvaru součinu kořenových činitelů tak vidíme, že kořeny jsou $N = 0$ a $N = K$. Funkce nabývá svého maxima ve vrcholu paraboly, tj. pro $N_* = \frac{K}{2} = 500$. Funkční hodnota je

$$h_* = f(N_*) = r \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\frac{K}{2}}{K} \right) = \frac{rK}{4}$$

a pro zadané hodnoty dostáváme

$$h_* = \frac{0,1 \times 1000}{4} = 25.$$

Porovnáním s nosnou kapacitou prostředí (1000) vidíme, že tato hodnota je 2,5 procenta nosné kapacity prostředí. Protože se při takovém lovu ustálí velikost populace na polovině nosné kapacity, znamená to, že lov probíhá takovou rychlostí, že za jednotku času je odloveno 5 procent aktuální populace.

Úloha 2. Určete, kolikrát se zmenší rychlost růstu populace, pokud velikost populace klesne z velikosti N_* dovolující maximální možnou intenzitu lovu, na jedno procento. To je hodnota, na kterou by bylo nutné snížit lov, aby nedocházelo k dalšímu úbytku. (V praxi bychom však chtěli obnovení stavů, a proto omezení určené v tomto kroku samo o sobě nestačí.)

Řešení. Označme stav populace po klesnutí N_2 . Pak

$$N_2 = 0,01N_* = 0,01 \frac{K}{2}$$

a dostáváme

$$f(N_2) = r \times 0,01 \frac{K}{2} \left(1 - \frac{0,01 \frac{K}{2}}{K} \right) = 0,004975rK$$

a

$$\frac{f(N_2)}{f(N_*)} = \frac{0,004975rK}{0,25rK} \approx 0,02.$$

Pokud velikost populace klesne na jedno procento, je nutné intenzitu lovu pro další nepokles omezit na dvě procenta původní intenzity.

Úloha 3. Předpokládejme, že lov je opatrný na 80 procentech maximálního udržitelného lovu h_* . Ani v tomto případě není vyhráno. Pokud bude populace malá, nedokáže se s lovem vyrovnat. Určete, jaká minimálně musí být velikost populace, aby se s lovem uvedené velikosti dokázala vyrovnat a nezkolabovala.

Řešení. Podle zadání je nutno vyřešit rovnici

$$rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = 0,8 \frac{rK}{4}.$$

Tuto rovnici je možno po roznásobení závorky a převedení všech členů na jednu stranu zapsat ve tvaru

$$-\frac{r}{K}N^2 + rN - 0,8 \frac{rK}{4} = 0.$$

Pro hodnoty $r = 0.1$ a $K = 1000$ dostáváme

$$-0,0001N^2 + 0,1N - 20 = 0$$

a po úpravě

$$N^2 - 1000N + 200\,000 = 0$$

Kořeny této rovnice jsou

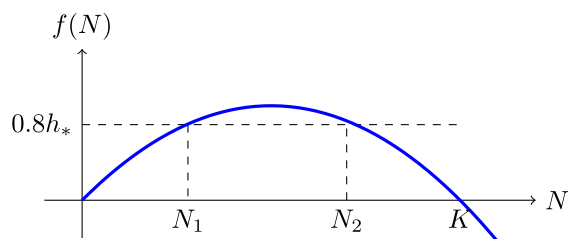
$$N_{1,2} = \frac{1000 \pm \sqrt{1000^2 - 4 \times 200\,000}}{2}$$

a odsud

$$N_1 \approx 276$$

a

$$N_2 \approx 724$$



Obrázek 4: Rychlost růstu populace jako funkce času s vyznačením nastavené intenzity lovu a stavů, kdy intenzita lovu je stejná jako rychlost přirozeného růstu populace.

Obrázek ukazuje vzájemnou polohu paraboly definující růst, čárkovně vyznačené intenzity lovu a průsečíky N_1 a N_2 . Pro velikost populace menší než N_1 lov dominuje nad růstem. V této situaci růst populace nestačí dorovnávat úbytky způsobené lovem, populace je přelovena, vymírá a dojde k jejímu kolapsu. Aby se mohl lov nastavit na úroveň 80 procent maximálního udržitelného lovu, je nutné počkat, dokud populace nedoroste do velikosti $N_1 = 276$. Tato hodnota je o něco více než polovina hodnoty N_* , tj. více než polovina hodnoty, na které se velikost populace ustálí při maximální trvale udržitelné intenzitě lovu.

Tato poslední část ukazuje, že po kolapsu populace není možné nastavit dřívější trvale udržitelnou intenzitu lovu a doufat v samovolné obnovení původního stavu. Populace musí mít dostatečnou dynamiku vývoje, aby se s tímto lovem vyrovnala. S obnovením lovu je nutné počkat, dokud opětovné nastavení lovu není bezpečné.

Odkazy a literatura

Literatura

- Wikipedie, *Collapse of the Atlantic northwest cod fishery*, https://en.wikipedia.org/wiki/Collapse_of_the_Atlantic_northwest_cod_fishery, October 1, 2023
- Ransom A. Myers; Jeffrey A. Hutchings; Nicholas J. Barrowman (1997). *Why do fish stocks collapse? The example of cod in Atlantic Canada* (PDF). *Ecological Applications*. 7 (1): 91–106. doi:10.1890/1051-0761(1997)007[0091:WDFSC]2.0.CO;2. JSTOR 2269409.
- *Collapse of the Pacific Sardine (Again)*, <https://fishbio.com/collapse-pacific-sardine/>, October 1, 2023
- *r/K selection theory*, Wikipedie, https://en.wikipedia.org/wiki/R/K_selection_theory, October 1, 2023

Zdroje obrázků

- Millennium Ecosystem Assessment: Ecosystems and Human Well-being: Opportunities and Challenges for Business and Industry Ecosystems, <https://www.millenniumassessment.org/documents/document.353.aspx.pdf>, October 1, 2023