



Math4You

2023–2025

Instructions for translators

1. Open this file on GitHub server. If you see `https://um.mendelu.cz/...` in URL, click View on GitHub to open this file on github.com.
2. If you see this file on GitHub server, you can edit the content of the file. Open the file in an editor. You can use simple editor (press e on GitHub). However, an advanced VS Code editor (press . on GitHub) is better, since it provides preview how the Markdown code renders. Alternatively press pencil for simple editor or press triangle next to the pencil to get access to VS Code described as `github.dev`.
3. Fix the keywords in the preamble.
4. Depending on which language version you want to use as a source for your translation, delete either English or Czech version below.
5. Translate to your language. Keep Markdown marking and math notation. If you use a tool to get first version of the translation, make sure that the markup is preserved.
6. In VS Code you can open the preview in another window by pressing `Ctrl+V` and `K`. Keep the preview open as you work, or close using a mouse.
7. Instead of saving, you have to commit and push the changes to the repository. Fill the Message under Source control (describe your changes, such as “Polish translation started”) and then press Commit&Push.
8. Make sure that your changes appear in the commit history. In rare cases (if you work with simultaneously with someone else) you have to download /Pull/ and merge his and yours changes. Usually Sync (Pull & Push) should work.
9. When you finish the translation, change `is_finished: False` in header to `is_finished: True`.

Instrukce pro překladatele

1. Otevřete tento soubor na serveru GitHub. Pokud máte soubor otevřen na `https://um.mendelu.cz/...`, otevřete jej na serveru github.com.
2. Pokud tento soubor vidíte na serveru GitHub, můžete obsah souboru upravit. Otevřete soubor v editoru. Můžete použít jednoduchý editor (stiskněte e na GitHubu). Lepší je však pokročilý editor VS Code (stikněte . na GitHubu), protože poskytuje náhled, jak se kód Markdown interpretuje. Případně stiskněte tužku pro jednoduchý editor nebo stiskněte trojúhelníček vedle tužky, abyste získali přístup k editoru VS Code popsáný jako `github.dev`.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.

3. Opravte klíčová slova v preambuli.
4. V závislosti na tom, kterou jazykovou verzi chcete použít jako zdrojový kód pro svůj překladu, odstraňte níže uvedenou anglickou nebo českou verzi.
5. Přeložte do svého jazyka. Ponechte značení Markdown a matematický zápis. Pokud použijete nástroj typu DeepL pro získání první verze překladu, ujistěte se, že zápis matematických výrazů byl zachován.
6. Ve VS Code můžete náhled otevřít v jiném okně stisknutím `Ctrl+V`. a `K`. Během práce nechte náhled otevřený nebo jej zavřete pomocí myši.
7. Místo uložení musíte změny zaregistrovat a odeslat do úložiště. Vyplňte zprávu v poli Zpráva (popište své změny, např. "Zahájen překlad do polštiny") a poté stiskněte tlačítko Commit&Push.
8. Ujistěte se, že se vaše změny objeví v historii revizí. Ve výjimečných případech (pokud pracujete současně s někým jiným) musíte stáhnout /Pull/ a sloučit jeho a vaše změny. Obvykle by synchronizace (Pull & Push) měla fungovat.
9. Po dokončení překladu změňte `is_finished: False` v záhlaví na `is_finished: True`.

Czech source

Odpal golfového míčku

Šikmý vrh

Šikmý vrh je nejobecnější způsob uvedení tělesa v homogenním tíhovém poli do pohybu. Předpokládejme, že hmotný bod byl šikmo vržen v prostředí bez odporu a vektor jeho počáteční rychlosti $\vec{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Při zavedení kartézského souřadného systému s osou x vodorovnou ve směru vrhu a osou y svislou vzhůru bude rychlost dána vektorem

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

Pohyb tělesa je ovlivněn tíhovým zrychlením o velikosti g mířícím svisle dolů. Vodorovná komponenta tíhového zrychlení je nulová a proto ve vodorovném směru pohyb není tíhovým polem ovlivněn. Ve směru svislém je pohyb tělesa ovlivněn zrychlením $-g$ a jedná se o rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí $v_0 \sin \alpha$.

Pro souřadnice polohy hmotného bodu bude platit

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{1}$$

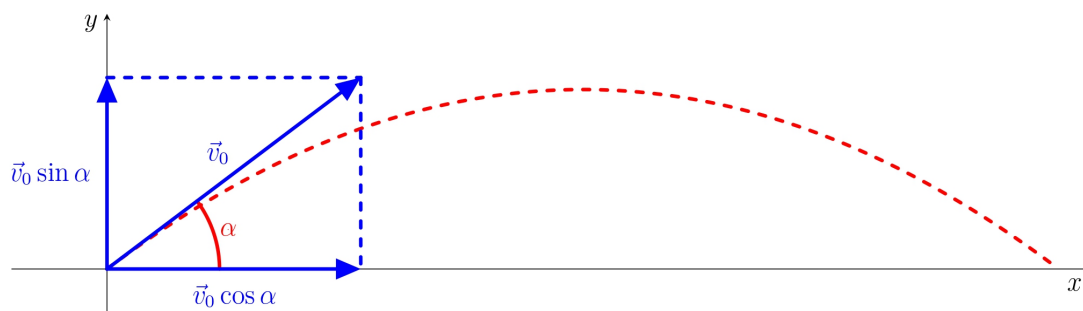


Figura 1: Šikmý vrh

Odpal golfového míčku

Hráč golfu odpaluje míček počáteční rychlostí v_0 svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Předpokládejme, že na míček působí zanedbatelné odporové síly. Pohyb míčku tedy splňuje podmínky pro pohyb šikmo vrženého tělesa v prostředí bez odporu vzduchu.

Úloha 1. Dokažte, že trajektorii golfového míčku je parabola.

Řešení. Pro nalezení rovnice trajektorie, tedy funkce $y = f(x)$, je nutné z rovnic (1) určujících polohu bodu odstranit parametr t .

Proto vyjádříme z první rovnice čas $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ a dosadíme ho do rovnice druhé:

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Odtud vidíme, že y -ová souřadnice trajektorie je kvadratickou funkcí x -ové souřadnice a trajektorii golfového míčku je proto parabola.

Úloha 2. Vypočítejte výšku vrhu, tj. maximální výšku y_{max} , do které se dostane vystřelený míček.

Řešení. Pro výpočet výšky vrhu potřebujeme vypočítat extrém funkce z předchozího bodu:

$$f: y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Vypočítáme derivaci funkce f

$$y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot 2x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Pro nalezení stacionárního bodu položíme derivaci rovnu nule a dostaneme rovnici

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Jejím řešením je

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Vzhledem k tomu, že trajektorii pohybu je konkávní kvadratická funkce, musí být nalezený stacionární bod jejím maximem, tj. jeho svislá souřadnice odpovídá výšce vrhu.

Výšku vrhu vypočítáme dosazením získané souřadnice x_{max} do funkce f :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Úloha 3. Vypočítejte, při jakém úhlu α doletí míček při konstantní velikosti počáteční rychlosti do maximální vzdálenosti.

Řešení. Pro výpočet úhlu maximálního dostřelu potřebujeme získat souřadnice x_d místa dopadu jako funkci úhlu α a tuto funkci maximalizovat, tj. najdeme maximum funkce $x_d(\alpha)$. Vzhledem k tomu, že při dopadu míčku bude $y = 0$, dosadíme do funkce

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x$$

za y nulovou výšku a vyřešíme získanou rovnici:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x,$$

$$0 = x \cdot \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Tato rovnice v součinném tvaru má dvě řešení. První řešení $x = 0$ odpovídá místu odpalu míčku a druhé řešení x_d místu dopadu

$$x_d(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Nyní je nutné nalézt maximum funkce $x_d(\alpha)$. Vzhledem k tvaru trajektorie stačí najít její stacionární bod. Vypočítáme derivaci funkce $x_d(\alpha)$ podle α

$$x'_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2.$$

Položíme-li derivaci rovnu nule, dostaneme pro stacionární bod $\cos 2\alpha = 0$, což je splněno pro $2\alpha = 90^\circ$ (pro odpal míčku zřejmě platí $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, proto je řešení jednoznačné). Odsud $\alpha = 45^\circ$.

Maximálního dostřelu při golfu docílíme při odpalu pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ a míček dopadne do vzdálenosti

$$x_d(45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g}.$$

Funkci $x_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ jsme mohli získat i snadněji využitím symetrie paraboly. Vrchol paraboly totiž leží uprostřed trajektorie míčku. Proto pro místo dopadu x_d platí $x_d(\alpha) = 2 \cdot x_{max}$. Tím se vyhneme řešení kvadratické rovnice v součinném tvaru získané dosazením $y = 0$ do funkce $y(x)$.

Literatura

1. Kubera, Miroslav; Nečas, Tomáš; Beneš, Vojtěch. *Online učebnice fyziky pro gymnázia - Vrchy* [online]. Dostupné z <https://e-manuel.cz/kapitoly/pouziti-pohybovych-zakonu/vyklad/vrchy/> [cit. 27.9.2023].

-
2. Moc, Ondřej; Eisenmann, Petr. *Šikmý vrh z rozhledny* [online]. Dostupné z https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi_2602_129_137.pdf [cit. 27.9.2023]

English source

Golf Ball Shot

Oblique Projectile Motion

Projectile motion is the most general way of setting an object in a homogeneous gravitational field into motion. Suppose that a body (point mass) is thrown obliquely into space without resistance. The initial velocity is $\vec{v}_0$ and the angle between the vector $\vec{v}_0$ and horizontal direction is α . Let us introduce the Cartesian coordinate system with horizontal x -axis and vertical y -axis as shown in the picture. The coordinates of the initial velocity vector are

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

The motion of the body is governed by an acceleration due to gravity g directed vertically downwards. The horizontal component of the gravitational acceleration is zero, therefore the motion in the horizontal direction is unaffected by the gravitational field. The vertical component of the motion is affected by the negative acceleration $-g$. Hence, it is a movement with constant (uniform) deceleration and initial velocity $v_0 \sin \alpha$.

We can use formulas for distance of motion with constant speed and constant acceleration to quantify the coordinates of the point mass. By doing so we get

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{1}$$

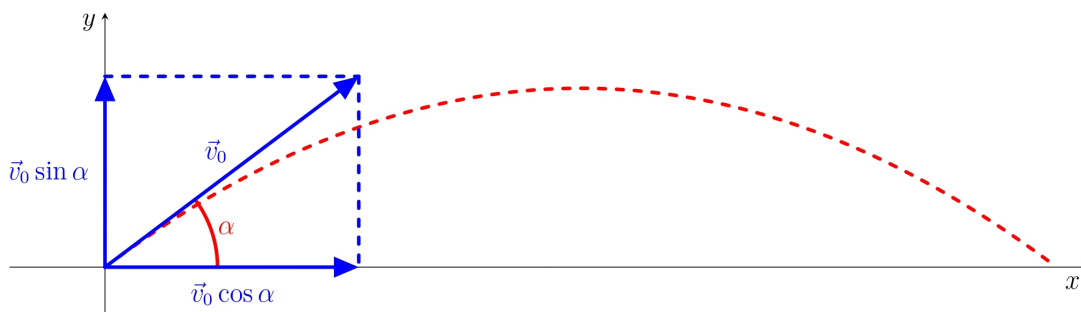


Figura 2: Šikmý vrh

Motion of a Golf Ball

A golfer hits a ball with an initial velocity v_0 . The angle between the initial velocity and the horizontal plane is α . Let's assume that the drag force is negligible. The motion of the ball therefore satisfies the conditions for movement of a projectile launched at an angle in an environment without air resistance.

Exercise 1. Prove that the trajectory of the golf ball follows a parabolic path.

Solution. To find the equation of the trajectory in the form $y = f(x)$ it is necessary to eliminate the parameter t from the system (1).

We solve the first equation with respect to time $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ and substitute into the second equation:

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x .$$

From here we see that the y -coordinate of the trajectory is a quadratic function of the x -coordinate and the trajectory of the golf ball is therefore described by a parabola.

Exercise 2. Calculate the height of the throw, i.e. the maximal height y_{max} that the launched ball reaches.

Solution. The height of the throw (projectile motion) is the maximum of the function from the previous exercise:

$$f: y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x .$$

We calculate the derivative of the function f as

$$y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot 2x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .$$

To find the stationary point, we set the derivative equal to zero and obtain the equation

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .$$

The solution of this equation is

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} .$$

Since the trajectory of the motion is a concave down quadratic function, the located stationary point is the maximum and the vertical coordinate of this point is the height of the throw.

The height of the throw is calculated by evaluating the function f at the obtained coordinate x_{max} :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

Exercise 3. Given constant initial velocity, find the angle α which guarantees maximal distance between the initial and the terminal point of the trajectory.

Solution. To find the maximum range angle we need to obtain the terminal point x_d of the trajectory as a function of the angle α and find the maximum of the function $x_d(\alpha)$. Given that $y = 0$ when the

ball hits the ground, we find zeros of the function

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

From here we obtain:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x,$$
$$0 = x \cdot \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

This factorized equation has two solutions. The first solution $x = 0$ corresponds to the place where the ball is launched and the second solution x_d to the place of impact

$$x_d(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Now we need to find the maximum of the function $x_d(\alpha)$. It is sufficient to find the stationary point, since it has been showed that the trajectory is a parabola that opens downward. We calculate the derivative of the function $x_d(\alpha)$ with respect to α

$$x'_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2.$$

By setting the derivative equal to zero, we get $\cos 2\alpha = 0$, which is satisfied for $2\alpha = 90^\circ$ (for the ball to be launched, obviously $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, so the solution is unambiguous). Thus the stationary point is $\alpha = 45^\circ$.

The maximum range in golf is achieved when hitting the ball at an angle $\alpha = 45^\circ$ and the ball lands at a distance of

$$x_d(45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g}.$$

Note that it is possible to obtain the function $x_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ without calculus by using the symmetry of the parabola. The vertex of the parabola is located in the middle of the zero points. Therefore, the x -coordinate of the impact point can be quantified as $x_d(\alpha) = 2 \cdot x_{max}$.

This allows us to avoid solving the quadratic equation obtained by substituting $y = 0$ into the function $y(x)$ and factorizing the right-hand side.

Literature

1. Kubera, Miroslav; Nečas, Tomáš; Beneš, Vojtěch. *Online učebnice fyziky pro gymnázia - Vrh* [online]. Available from <https://e-manuel.cz/kapitoly/pouziti-pohybovych-zakonu/vyklad/vrhy/> [cit. 27.9.2023].
2. Moc, Ondřej; Eisenmann, Petr. *Šikmý vrh z rozhledny* [online]. Available from https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi_2602_129_137.pdf [cit. 27.9.2023]