



Math4You

2023–2025

Kalkulator paraboliczny

Podczas surfowania po Internecie Eva znalazła interesujący fakt dotyczący wykresu funkcji $f: y = x^2$, który polega na tym, że wykres może być użyty jako kalkulator do pomnożenia dwóch liczb a i b .¹ Procedura jest następująca:

1. Na osi x zaznacz punkty odpowiadające liczbom $-a$ i b .
2. W tych punktach narysuj linie prostopadłe do osi x i skonstruuj skonstruować ich przecięcia z wykresem funkcji f .
3. Linia przechodząca przez nowo skonstruowane punkty przecięcia przecina oś y w punkcie, którego odległość od początku wynosi ab .

Procedurę można wypróbować w załączonym arkuszu, jego ilustracje są również dostępne w programie GeoGebra. Interaktywny aplet można znaleźć na stronie internetowej <https://www.geogebra.org/m/sj5cjbaf>.

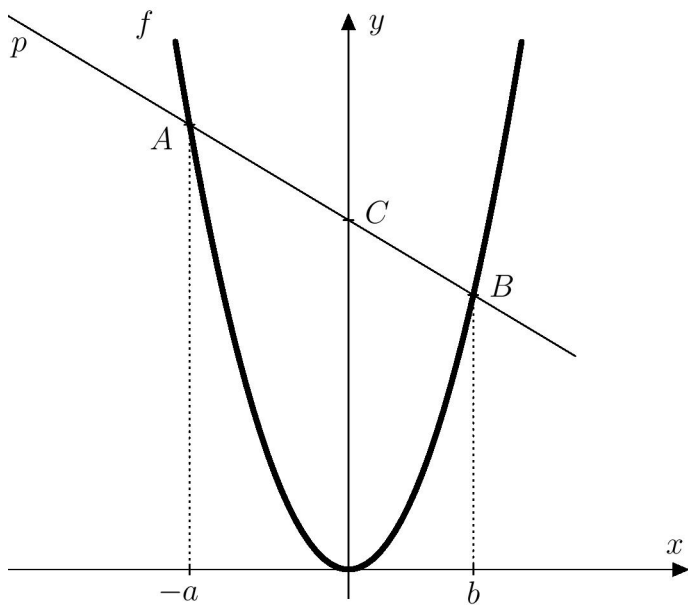
Zadanie 1. Czy powyższa procedura ma zastosowanie do wszystkich par czy tylko do niektórych? Czy tę procedurę można udowodnić?

Rozwiązanie. Z procedury wynika, że jeśli obrazy liczb $-a$ i b łączą się, linia opisana w trzecim kroku nie może być jednoznacznie skonstruowana. Dlatego podana procedura nie zadziała, jeśli $-a = b$. My pokażemy, że poza tym przypadkiem, procedura działa dla wszystkich innych par liczb a i b .

Skonstruujmy, zgodnie z podaną procedurą, na osi x punkty odpowiadające liczbom $-a$ i $-b$, a następnie skonstruujmy w tych punktach proste prostopadłe do osi x . Oznaczmy przecięcia tych prostopadłych z parabolą przez A i B , a linię prostą AB oznaczmy przez p . Prosta p przecina oś y w punkcie C , który wyznacza nieznaną liczbę m .

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.

¹Ogólnie rzecz biorąc, wykresy, które pozwalają nam wykonywać operacje arytmetyczne za pomocą konstrukcji geometrycznych nazywane są *nomogramami*.



Prosta p jest określona przez punkty $A(-a; a^2)$ i $B(b; b^2)$, więc wektor kierunku to

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [b + a; b^2 - a^2].$$

Mnożąc wektor $\vec{u}$ przez liczbę $\frac{1}{a+b}$ otrzymujemy

$$\vec{u} = [1; b - a].$$

Korektę tę można wykonać, ponieważ w naszym przypadku $b \neq a$, a więc $b + a \neq 0$. W ten sposób otrzymujemy równania parametryczne

$$p: X = B + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

$$p: x = b + t$$

$$y = b^2 + t \cdot (b - a), t \in \mathbb{R}$$

Podstawiając współrzędne punktu C po lewej stronie równań (tj. $x = 0$, $y = m$) otrzymujemy układ

$$0 = b + t$$

$$m = b^2 + t(b - a)$$

Z pierwszego równania mamy $t = -b$ i podstawiamy je do drugiego równania. Stąd

$$m = b^2 + (-b) \cdot (b - a)$$

$$m = ab.$$

Jest to wynik, który musieliśmy udowodnić.