

Geometria fraktalna

Keywords: ciągi i szeregi, ciąg geometryczny, geometria fraktalna, płatek śniegu Kocha

Fraktal to obiekt, którego struktura geometryczna się powtarza. Charakterystyczną cechą fraktali jest ich samopodobieństwo. Przykłady fraktali w przyrodzie to chmury, drzewa lub główka kalafioru. Słowo “fraktal” pochodzi od łacińskiego słowa “fractus”, które oznacza złamany lub rozbity. Termin ten został stworzony przez Benoita B. Mandelbrota, uważany za ojca geometrii fraktalnej, znany ze swojej książki *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

W badaniu fraktali ważną rolę odgrywa ich wymiar. Wymiar topologiczny, znany z klasycznej geometrii euklidesowej, okazał się niewystarczający do opisu fraktali. Dlatego potrzebny był inny rodzaj wymiaru. Został on wprowadzony przez Felixa Hausdorffa, znany jako wymiar Hausdorffa. Dla prostych obiektów możemy go rozumieć jako liczbę:

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

gdzie N to liczba części, z których składa się obiekt, utworzona przez samopodobieństwo ze współczynnikiem r z oryginalnego obiektu. Na przykład, dla kwadratu prawdą jest, że może on składać się z czterech mniejszych kwadratów, które powstają z niego przez samopodobieństwo ze współczynnikiem $r = \frac{1}{2}$, tj.,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

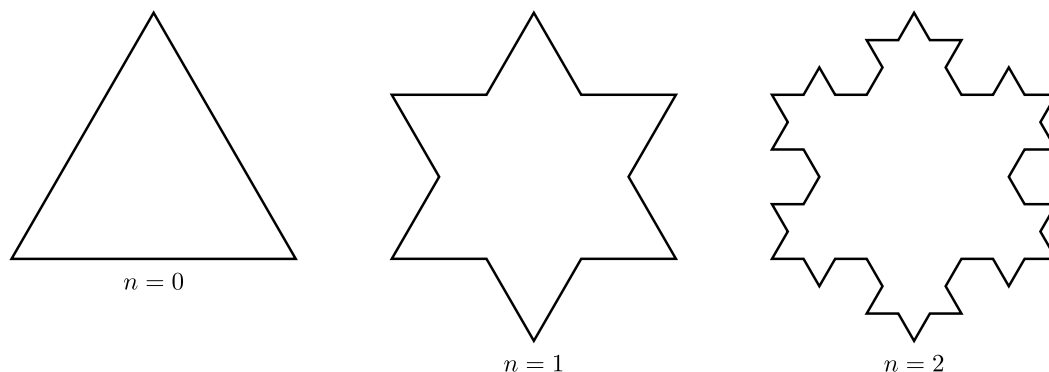
Zatem dla kwadratu jego wymiar fraktalny (wymiar Hausdorffa) jest równy jego normalnemu wymiarowi intuicyjnemu (wymiar topologiczny).

Płatek śniegu Kocha

Płatek śniegu Kocha jest krzywą na płaszczyźnie utworzoną w iteracyjnym procesie z trójkąta równobocznego.

Na początku dany jest trójkąt równoboczny o bokach długości 1. W każdym kolejnym kroku wykonywane są następujące czynności:

1. Każdy odcinek linii jest podzielony na trzy części.
2. Trójkąt równoboczny jest skonstruowany nad środkową trzecią częścią odcinka.
3. Podstawa skonstruowanego trójkąta (wcześniej środkowa jedna trzecia odcinka linii) jest usuwana.



Rysunek 1: Pierwsza iteracja płatka śniegu Kocha

Z rysunku widać, że aby wyznaczyć długość jednego boku płatka śniegu po pierwszej iteracji, potrzebujemy 4 boków trójkąta, który został utworzony przez zmniejszenie boku oryginalnego trójkąta o kroków zero ze współczynnikiem samopodobieństwa $r = \frac{1}{3}$, tj.

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Ponieważ płatek śniegu Kocha jest krzywą, jego wymiar powinien wynosić 1. Ta rozbieżność wynika z faktu, że płatek śniegu Kocha jest ostatecznie tak pofragmentowany, że wynikowy fraktal ma nieskończoną długość, ale ogranicza strukturę płaszczyzny o skończonej powierzchni.

Zadanie 1. Oblicz obwód płatka śniegu Kocha po pierwszej, drugiej i trzeciej iteracji.

Zadanie 2. Jaki jest obwód płatka śniegu Kocha po n -tej iteracji? Udowodnij, że obwód płatka śniegu Kocha jest nieskończony.

Zadanie 3. Oblicz pole powierzchni płatka śniegu Kocha po pierwszej i drugiej iteracji.

Zadanie 4. Jakie jest pole powierzchni płatka śniegu Kocha po n -tej iteracji? Ile razy większe jest pole powierzchni płatka śniegu Kocha w stosunku do oryginalnego trójkąta równobocznego?

Literatura

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Dostępny pod adresem <https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html> [cit. 13. 7. 2023].
- Koch curve* [online]. Dostępny pod adresem https://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_k%C5%99ivka [cit. 13. 7. 2023].