Geometría fractal

Keywords: sucesiones y límites, progresión geométrica, fractal, copo de nieve de Koch

Un fractal es un objeto cuya estructura geométrica se repite dentro de sí misma. La propiedad característica de los fractales es su autosemejanza. Ejemplos de fractales en la naturaleza son las nubes, los árboles o una cabeza de coliflor. La palabra "fractal" procede del latín "fractus", que significa roto o hecho añicos. Fue acuñada por Benoit B. Mandelbrot, considerado el padre de la geometría fractal, conocido por su libro La geometría fractal de la naturaleza (1982).

En el estudio de los fractales, su dimensión desempeña un papel importante. La dimensión topológica, conocida por la geometría euclidiana clásica, resultó insuficiente para describir los fractales. Por lo tanto, se necesitaba otro tipo de dimensión. Fue introducida por Felix Hausdorff, conocida como dimensión de Hausdorff. Para objetos simples, podemos entenderla como el número:

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

donde N es el número de partes de que se compone el objeto, formado por autosemejanza con el coeficiente r del objeto original. Por ejemplo, para un cuadrado es cierto que puede estar compuesto de cuatro cuadrados más pequeños que surgen de él por autosemejanza con el coeficiente $r = \frac{1}{2}$, i.e.,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Así, para un cuadrado, su dimensión fractal (dimensión de Hausdorff) es la dimensión normal intuitiva (dimensión topológica).

Copo de nieve de Koch

El *Copo de nieve* es una curva en el plano creada por un proceso iterativo a partir de un triángulo equilátero.

Al principio, hay un triángulo equilátero con lados de longitud 1. En cada paso posterior se realiza lo siguiente:

1. Cada segmento de línea se divide en tercios.
2. Sobre el tercio medio del segmento se construye un triángulo equilátero.
3. Se retira la base del triángulo construido (anteriormente el tercio del segmento de recta).

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

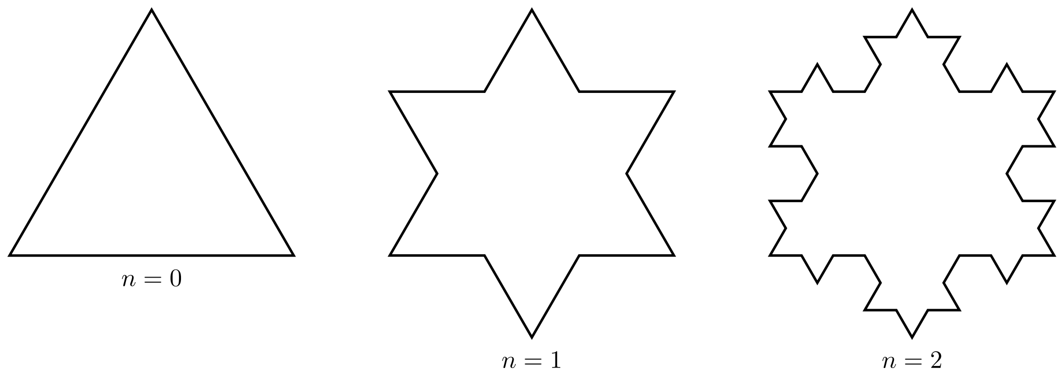

Figura 1: La primera iteración del copo de nieve de Koch

A partir de la figura, podemos ver que para determinar la longitud de un lado del copo de nieve tras la primera iteración, necesitamos 4 lados del triángulo que se formó reduciendo el lado del triángulo original desde el paso cero con un coeficiente de autosimilitud $r = \frac{1}{3}$, es decir,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26.$$

Dado que el copo de nieve de Koch es una curva, cabría esperar que su dimensión fuera 1. Esta discrepancia se debe al hecho de que el copo de nieve de Koch está finalmente tan fragmentado que el fractal resultante tiene una longitud pero limita una estructura plana de área finita.

Ejercicio 1. Calcula el perímetro del copo de nieve de Koch después de la primera, segunda y tercera iteraciones.

Ejercicio 2. ¿Cuál es el perímetro del copo de nieve de Koch después de la ¿n$-ésima iteración? Demuestra que el perímetro del copo de nieve de Koch es infinito.

Ejercicio 3. Calcula el área del copo de nieve de Koch después de la primera y segunda iteraciones.

Ejercicio 4. ¿Cuál es el área del copo de nieve de Koch después de la n-ésima iteración? ¿Cuántas veces mayor es el área del copo de nieve de Koch respecto al triángulo equilátero original?

Bibliografía

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Accesible de `https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html` [cit. 13. 7. 2023].
- *Koch curve* [online]. Accesible de `https://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_k\%C5\%99ivka` [cit. 13. 7. 2023].

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union