Math4You

2023–2025

Fraktální geometrie

Fraktál je objekt, jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém. Charakteristickou vlastností fraktálů je jejich soběpodobnost. Příkladem fraktálů v přírodě mohou být mraky, stromy nebo hlávka květáku. Slovo fraktál pochází z latinského slova fractus, v překladu zlomený, rozbitý. Vymyslel ho Benoit B. Mandelbrot, považovaný za otce fraktální geometrie, kterou proslavil svou knihou *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

Při zkoumání fraktálů hraje důležitou roli jejich dimenze. Dimenze, tzv. topologická dimenze, která je známá z klasické euklidovské geometrie, při popisu fraktálů nestačila, proto bylo potřeba zavést i jiný typ dimenze. Felix Hausdorff zavedl novou fraktální dimenzi, též označovanou Hausdorffova dimenze. Pro jednoduché objekty ji můžeme chápat jako číslo

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

kde N je počet částí z kterých se objekt skládá a které vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem r z původního objektu. Například pro čtverec platí, že jej můžeme složit ze čtyř menších čtverců, které z něj vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem $r = \frac{1}{2}$, tedy

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Pro čtverec je tedy jeho fraktální dimenze stejná jako normální intuitivní dimenze.

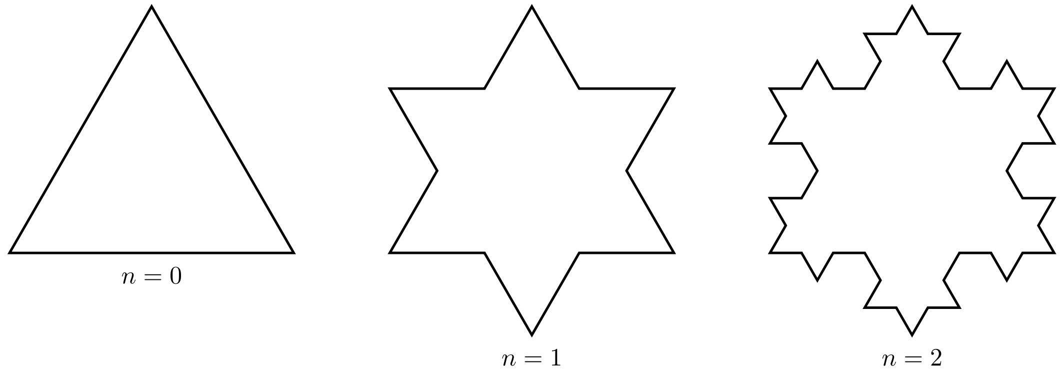
Kochova vločka

Kochova vločka je křivka v rovině, která vzniká iteračním procesem z rovnostranného trojúhelníku.

Na začátku je rovnostranný trojúhelník se stranami délky 1. V každém dalším kroku se pak provede následující:

1. Každá úsečka se rozdělí na třetiny.
2. Nad prostřední třetinou úsečky se sestrojí rovnostranný trojúhelník.
3. Základna trojúhelníka (dřívější prostřední třetina úsečky) se odstraní.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union.



Obrázek 1: První iterace Kochovy vločky

Z obrázku můžeme vidět, že pro určení délky jedné strany vločky v první iteraci, potřebujeme 4 strany trojúhelníka, který vznikl zmenšením strany trojúhelníka v nultém kroku pomocí stejnolehlosti s koeficintem $r = \frac{1}{3}$, tedy

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26.$$

Jelikož Kochova vločka je křivka, očekávali bychom, že její dimenze je 1. Tento rozpor je dán tím, že Kochova vločka je na konci natolik členitá, že výsledný fraktál má nekonečnou délku, ale ohraničuje útvar konečného obsahu.

Úloha 1. Vypočítejte obvod Kochovy vločky po první, druhé a třetí iterací.

Úloha 2. Jaký je obvod Kochovy vločky po n-té iteraci? Ukažte, že obvod Kochovy vločky bude nekonečný.

Úloha 3. Vypočítejte obsah Kochovy vločky po první a druhé iteraci.

Úloha 4. Jaký je obsah Kochovy vločky po n-té iteraci? Kolikrát větší obsah má Kochova vločka vzhledem k původnímu rovnostrannému trojúhelníku?

Literatura

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Dostupné z `https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html` [cit. 13. 7. 2023].
- *Kochova křivka* [online]. Dostupné z `https://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_k%C5%99ivka` [cit. 13. 7. 2023].